

1.GİRİŞ

Günümüzde hızla gelişen teknoloji ve bilgi birikimi sayesinde her geçen gün yeni elektronik cihazlar üretilmekte ve mevcut frekans bandının yetersiz kalması nedeniyle üreticiler yüksek frekanslara yönelmektedirler. Yüksek frekans kullanıldığında ise cihazların boyutları küçülmekte ve cihaz boyutu ile dalga boyu artık karşılaştırılabilecek seviyelere gelmektedir. Frekansın GHz'ler mertebesine ulaştığı mikro ölçekli bu cihazlarda meydana gelen elektromanyetik dalga propagasyonu, yansıma, kırılma, girişim gibi karmaşık olayların anlaşılabilmesi, ancak olayların fiziğinin doğru anlaşılmasıyla mümkündür. Analitik olarak çözülmesi çok zor olan bu tip problemlerin çözümü, yüksek teknoloji kullanılarak hazırlanmış ölçme düzenekleriyle veya güçlü algoritmalar kullanan sayısal modelleme teknikleriyle yapılabilmektedir. Deneysel ölçüm yöntemlerinin pahalılığı nedeniyle bu karmaşık problemlerin analizinde çok hızlı ve yüksek kapasiteli bilgisayarlar kullanan sayısal modelleme teknikleri tercih edilmektedir. Böylece hem zamandan hem de paradan tasarruf sağlanmakta ve aynı zamanda deneysel yöntemlerle elde edilmesi mümkün olmayan bilgiler elde edilmektedir. Bu durumda sayısal modelleme teknikleriyle uğraşan mikrodalga mühendislerinin programlama, işaret işleme ve elektromanyetik teori hakkında çok iyi bilgi sahibi olması gerekmektedir.

Bu tezde mikrostrip yapılar da elektromanyetik dalga propagasyonunun analizini yapmak için gerekli ön bilgiler verilecek ve 2 boyutlu FDTD denklemleri çözdürülerek zaman domeninde elektromanyetik dalga yayılımı gözlenecektir. Bu amaçla tezin 2. bölümünde Maxwell denklemleri ve elektromanyetik dalgalar hakkında temel bilgiler verilmiş, 3. bölümde mevcut sayısal yöntemler kısaca tanıtılmış, 4. bölümde mikrostrip hatların yapıları ve özellikleri anlatılmış, 5. Bölümde FDTD metodunun ayrıntıları üzerinde durularak 6. Bölümde iki boyutlu yapılar için elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir.

2. TEMEL ELEKTROMANYETİK

2.1. Maxwell Denklemleri

Elektromanyetizma biliminin kurucularından James Clerk Maxwell'in o zamana kadar birbirinden ayrı olarak düşünölen elektrik ve manyetizma yasalarını sistemli bir bütönlük içinde matematiksel bir yapıya kavuştürmasıyla elektromanyetizma kuramının temelleri atılmıştır. Maxwell, değişken elektrik ve manyetik alanların birbirlerinden ayrı olarak var olamayacağını göstermiş, elektromanyetik alan ve dalga kavramlarını geliştirmiştir. James Clerk Maxwell tarafından ortaya koyulan Maxwell denklemleri, uzayın herhangi bir noktasında ve zamanın herhangi bir anında elektrik ve manyetik alan değerlerini birbirine bağlar. Bu nedenle elektromanyetik dalgalar Maxwell denklemleriyle tanımlanır.

2.1.1. Maxwell Denklemlerinin Elde Edilmesi

Temel elektrik ve manyetizma yasaları kullanılarak elde edilmiş olan 4 adet Maxwell denklemi bulunmaktadır.

(a) Gauss Yasasına göre bir yüzey parçası üzerindeki \vec{E} alanının akısı ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$), o yüzeyi kesen çizgilerin sayısı ile orantılıdır. Burada, bir yükü çevreleyen kapalı bir yüzeyden geçen akı q/ϵ_0 ile verilir. Böylece,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

olur. Burada q yükü kapalı yüzey içinde kalan yüklerin toplamıdır. Bu yüzeyin dışında kalan bir yükün akıya katkısı sıfır olur çünkü, bu yüklerin alan çizgileri yüzeyin bir yerinden girip başka bir yerinden çıkarlar.

Gauss yasasında verilen (2.1) ifadesine diverjans teoremi uygulanırsa,

$$\oint_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{hacim}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

olur. Burada $q = \int \rho \cdot dV$ olduğundan,

$$\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot dV = \frac{\int \rho \cdot dV}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

olur. Böylece 1.Maxwell Denklemi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

olarak elde edilir.

(b) Manyetizma için Gauss kanunu doğada izole edilmiş manyetik kutupların var olamayacağını gösterir. Yani herhangi bir kapalı yüzey boyunca manyetik akı sıfırdır. Buna göre,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.5)$$

dır. Bu ifade için diverjans teoremi alınırsa 2.Maxwell denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

(c) Faraday kanununa göre, sabit bir manyetik alan içinde hareket ettirilen iletken çerçevede indüklenen gerilim,

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.7)$$

ile verilir.

Faraday kanununun integral ifadesi

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (2.8)$$

olduğundan (2.8) denkleminde Stokes teoremi uygulanırsa ;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (2.9)$$

ve

$$-\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.10)$$

olur. Böylece 3. Maxwell denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.11)$$

Buna göre manyetik alanın zamana bağlı değişimi elektrik alan meydana getirir.

(d) Amper kanununa göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I \quad (2.12)$$

dır. Burada $I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$ olduğundan, Stokes teoremine göre,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.13)$$

olur.

Buradan 4. Maxwell denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.14)$$

Buna göre manyetik alanın oluşması için ya elektrik alanının zamana bağlı olarak değişmesi ya da bir akımın varlığı gereklidir.

Boşlukta ρ yük yoğunluğu ve J akım yoğunluğu sıfır olduğundan elde edilen 4 adet Maxwell denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.15) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.16)$$

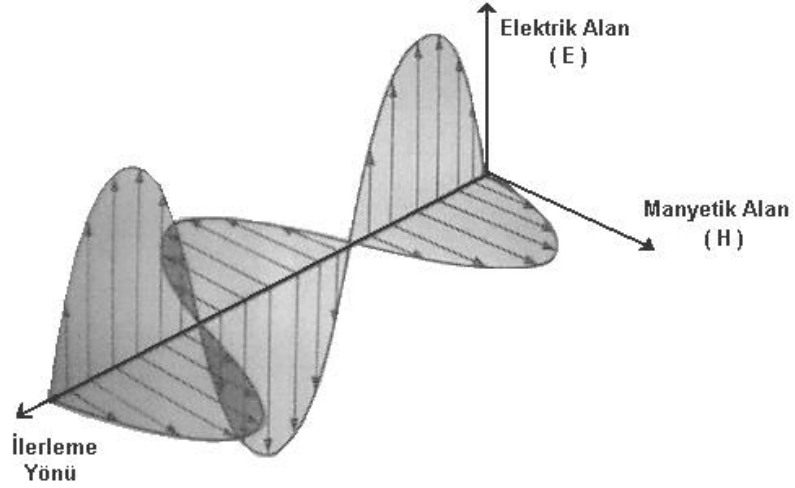
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.17) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.18)$$

2.2. Elektromanyetik Dalgalar

Durgun bir yük sadece E elektrik alanı oluştururken, hareketli bir yük elektrik alana ek olarak bir de manyetik alan oluşturur. Eğer zamanla değişim yoksa, elektrik alan ve manyetik alan birbirlerinden bağımsız olarak bulunabilirler. Yani durgun bir yük veya düzgün doğrusal hareket yapan bir yük elektromanyetik dalga yayınlamaz.

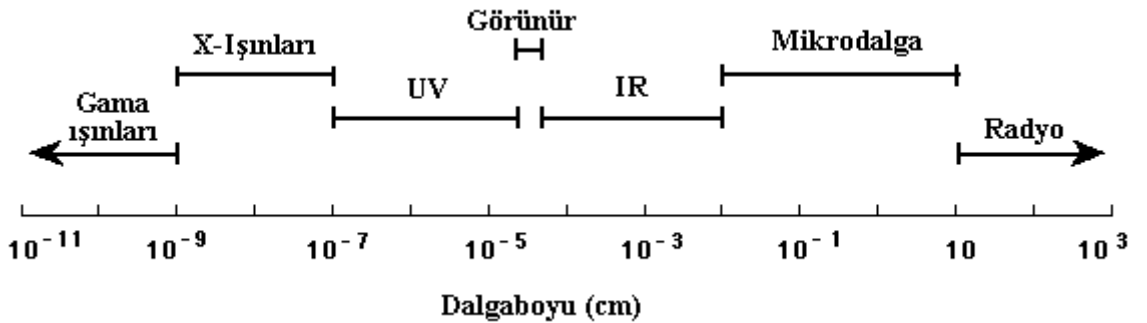
Elektromanyetik dalga oluşması için yükün ivmelenmesi gerekir. Zamanla değişim gösteren durumlarda, elektrik alan ve manyetik alan birbirine tamamen bağlıdır. Yani elektrik alan değişimi manyetik alan oluşturur, manyetik alan değişimi de elektrik alan oluşturur.

Değişken bir elektrik alanına her zaman bir manyetik alan, değişken bir manyetik alana da her zaman bir elektrik alan eşlik eder. Boşlukta bu iki alan birbirine diktir ve elektromanyetik dalga, doğrultusu her iki alana da dik olacak şekilde yayılır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 : Elektromanyetik dalganın E ve H bileşenleri.

Elektromanyetik dalgalar boşlukta ışık hızıyla yayılır ve Maxwell denklemleriyle tanımlanır. Elektromanyetik dalgaların farklılığı dalga boylarının farklı olmasından kaynaklanır. $\lambda = c/f$ bağıntısına göre frekans arttıkça dalga boyu küçülür, frekans azaldıkça dalga boyu büyür. Elektromanyetik dalgalar çok düşük frekanslardan çok yüksek frekanslara kadar uzanır. Bu nedenle elektromanyetik spektrum geniş bir frekans aralığını kapsar (Şekil 2.2). Bütün elektromanyetik dalgalar spektrumun hangi bölgesinde olursa olsun daima ışık hızında hareket eder. Gama ışınları, X ışınları, ultraviyole, infrared, mikrodalga, radyo dalgaları gibi çeşitleri olan elektromanyetik dalgalar, 100 Hz ile 10^{22} Hz arasında çok geniş bir frekans aralığına sahiptir.



Şekil 2.2 : Frekans Spektrumu

3. SAYISAL YÖNTEMLER

Elektromanyetik problemlerin çözümünde analitik yöntemler, sayısal yöntemler ve deney sonuçları kullanılmaktadır. Bilgisayar hızlarının ve hafızalarının yeterli olmadığı yıllarda, analitik yöntemlere ağırlık verilmiş ve bir çok problem incelenmiştir. Analitik çözüm elde etmenin mümkün olmadığı yapılar için ise deneysel yöntemler ve ölçümler tercih edilmiştir.

1980'lerde bilgisayar teknolojilerindeki gelişmelere paralel olarak karmaşık yapıların analizinde sayısal yöntemler kullanılmaya başlanmıştır. 1990'lardan itibaren doğru, verimli ve hızlı çözümler üretebilecek algoritmalar geliştirmeye yönelik çalışmalar yapılmaktadır.

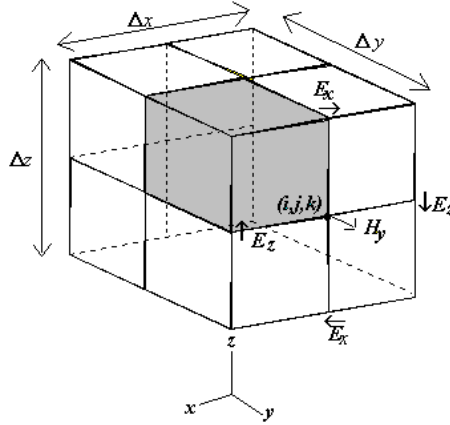
Elektromanyetik problemlerin çözümünde kullanılan pek çok sayısal yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları problemi zaman domeninde, bazıları da frekans domeninde çözer. Her yöntem ancak belli koşullarda doğru sonuçlar verdiği için, bütün elektromanyetik problemlerin çözümünde kullanılacak bir yöntem bulunmamaktadır.

Sayısal yöntemler aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- ◆ Zaman Domeninde Sonlu Farklar (FDTD) Metodu
- ◆ İletim Hattı Matrisi (TLM) Metodu
- ◆ Sonlu Elemanlar (FE) Metodu
- ◆ Parabolik Denklem (PE) Metodu
- ◆ İntegral Denklem (IE) Metodu
- ◆ Moment (MoM) Metodu
- ◆ Spektral Domen (SDM) Metodu

3.1 Zaman Domeninde Sonlu Farklar (FDTD) Metodu

FDTD metodu, Maxwell denklemlerine ait zamana bağımlı rotasyonel bağıntılarını doğrudan zaman domeninde çözen bir yöntemdir. Bu yöntemde modellenen yapı Şekil 3.1'deki gibi çok küçük hücrelere bölünerek her bir hücreye ait ϵ , μ ve σ parametreleri belirlenir. Bütün hücrelerde E ve H alanlarına ait FDTD denklemleri iteratif olarak çözülürken analiz yapılır.

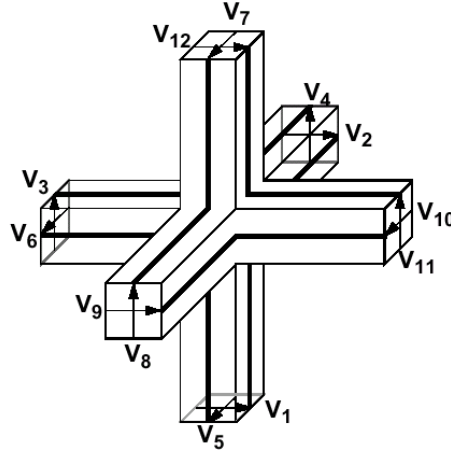


Şekil 3.1: FDTD Hücresi

FDTD metodu iletken, dielektrik ve lineer olmayan kayıplı malzemelerde elektromanyetik dalga yayılımının incelenmesinde, pek çok elektromanyetik problemin modellenmesinde ve mikrostrip hatların analizinde kullanılmaktadır.

3.2 İletim Hattı Matrisi (TLM) Metodu

İletim hattı matrisi metodu alan teorisi-devre teorisi eşdeğerliğine dayanan bir yöntemdir. Bu yöntemde FDTD metoduna benzer olarak analizi yapılacak olan yapı Şekil 3.2'deki gibi küçük hücrelere bölünerek her bir hücreye ait akım ve gerilim değerleri iteratif olarak hesaplanır.

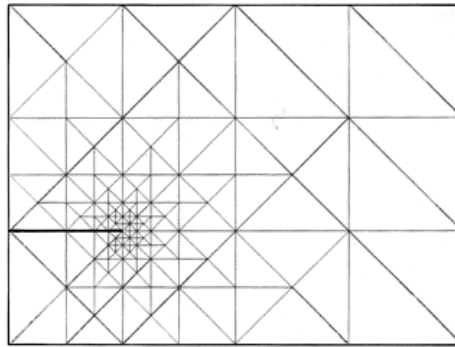


Şekil 3.2 : TLM Hücresi

Bu yöntem pek çok elektromanyetik problemin analizinde ve EMC/EMI modellemede kullanılmaktadır.

3.3 Sonlu Elemanlar (FE) Metodu

Sonlu elemanlar yöntemi pek çok mühendislik dalında, malzemelerin ve yapısal problemlerin analizinde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde yapı Şekil 3.3'deki gibi küçük homojen elemanlara bölünerek modellenir. Modelleme, yapının geometrisi, malzemeye ait sabitler ve sınır şartları gibi bilgileri içerir.



Şekil 3.3 : FE Hücre Yapısı

Sonlu elemanlar yöntemi manyetik ve elektrostatikteki kompleks nonlineer problemlerin çözümünde, homojen olmayan kompleks yapıların analizinde ve 3 boyutlu elektromanyetik radyasyon problemlerinin analizinde kullanılmaktadır (Hubing,1991).

3.4 Parabolik Denklem (PE) Metodu

Dalga iletimi problemlerinde yaygın olarak kullanılan bu yöntemde parabolik formdaki dalga denklemi Fourier dönüşümü kullanılarak sayısal olarak çözdürülür. Bu yöntemde, dalga denklemi tek yönde ilerleyen dalga hareketlerini modellediğinden, geri yansımaların olmadığı problemler incelenebilir (Sevgi,1999).

Parabolik denklem metodu ile günümüzde 2 ve 3 boyutlu elektromanyetik problemlerin ve yeryüzünde elektromanyetik dalga iletiminin analizi yapılmaktadır.

3.5 İntegral Denklem (IE) Metodu

İntegral denklem metodu 3 boyutlu yapıların yüzey akım yoğunluğu ile ilgilenen ve Green fonksiyonlarının kullanan bir yöntemdir. Bu yöntemde ışımaya ve kuplajın hesaba katıldığı 3 boyutlu alan çözümleri yapılır.

3.6 Moment (MoM) Metodu

Moment metodu bir frekans domeni yöntemidir. Moment metodunda ele alınan yapıya ait Green fonksiyonu analitik olarak bulunarak yapı üzerinde oluşan yüzey akımları sayısal olarak hesaplanır.

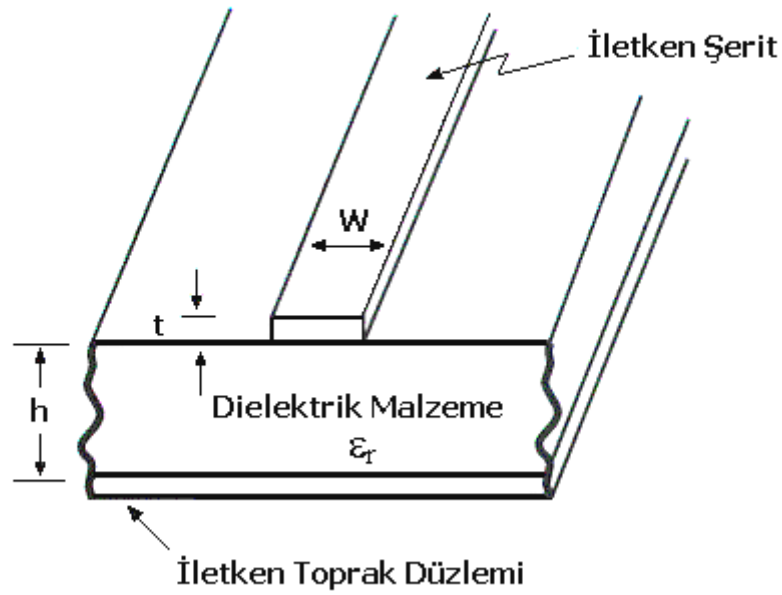
Bu yöntem 3 boyutlu elektromanyetik radyasyon problemlerinde, anten tasarımında, elektromanyetik saçılma analizinde, homojen dielektriklerin analizinde kullanılmaktadır. Ancak bu metod homojen olmayan kompleks geometriye sahip yapıların analizinde iyi sonuç vermez.

3.7 Spektral Domen (SDM) Metodu

Spektral domen metodu Green fonksiyonlarını kullanarak frekans domeninde çözüm üreten bir yöntemdir. Bu yöntemde integral formdaki Green fonksiyonu cebirsel hale dönüştürülerek bilinmeyen akım yoğunluğu hesaplanır.

4. MİKROSTRİP HATLAR

Mikrostrip hatlar, yüksek radyo frekansında ve mikrodalga bandındaki frekanslarda (400MHz-30GHz) çalışan elektronik devrelerde kullanılır. Basit bir mikrostrip iletim hattı alüminyum veya bakırdan yapılmış iletken bir tabakanın üzerine yerleştirilen ince bir dielektrik tabakadan oluşur. Bu dielektrik tabakanın üzerinde de iletken bir şerit bulunur (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 : Mikrostrip Hat ve Boyutları

Mikrostrip hatlarda enerji, alttaki iletken tabaka ile üstteki iletken şerit arasında iletilir. Şekil 4.1'den görüldüğü gibi mikrostrip hattın yan taraflarında fiziksel sınırlar olmadığından az da olsa enerji sızıntısı meydana gelir. Bu nedenle mikrostrip hatlı devrelerin modellenmesi oldukça zordur (Sevgi,1999).

Mikrostrip devrelerin iki farklı kullanım alanı vardır.

- (a) Mikrostrip hatlar, yüksek frekanslarda çalışan elektronik devrelerde ayırık elemanlar arasındaki bağlantılarda kullanılır.
- (b) Dielektrik tabaka üzerindeki iletken şeridin uygun şekilde yerleştirilmesiyle monolitik mikrostrip devreler olarak bilinen filtre, empedans uydurucu gibi devrelerin yapımında kullanılır.

Mikrostrip hatların iki önemli parametresi efektif dielektrik katsayısı ve karakteristik empedanstır. Bu parametrelerin frekansa bağlı değişimi FDTD metodu ile analiz yapılarak elde edilebilmektedir.

Bir iletim hattının karakteristik empedansı Z_0 , ilerleyen elektromanyetik dalganın hattın sonundan gördüğü empedanstır. İlerleyen tek bir elektromanyetik dalga için Z_0 , gerilimin akıma oranıdır.

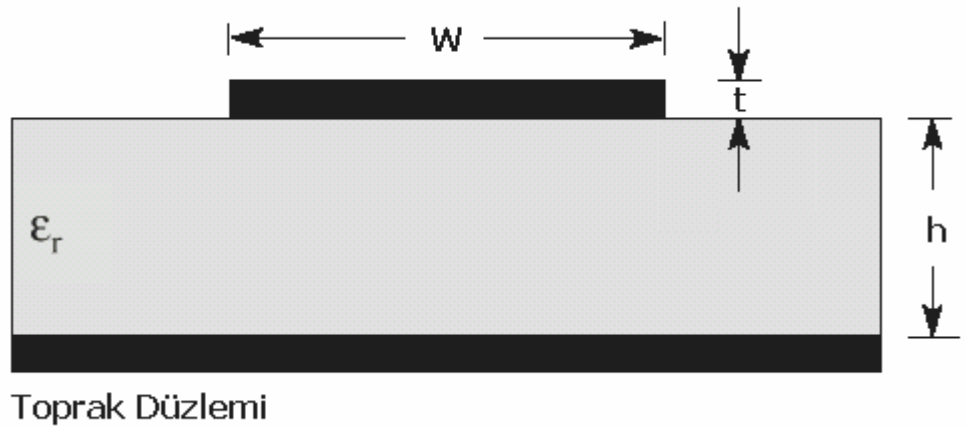
Devre tasarımında karakteristik empedansın önemi, ilerleyen elektromanyetik dalga farklı karakteristik empedansa sahip bir hattın sınırına geldiğinde ortaya çıkar. Eğer iki hattın empedansı farklı ise ilerleyen dalganın bir kısmı geldiği hatta geri yansiyacak, kalan kısmı ise ikinci hattan ilerleyecektir.

Z_1 ve Z_2 her bir hattın karakteristik empedansını göstermek üzere yansıma faktörü aşağıdaki gibi yazılır.

$$\rho = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (4.1)$$

Burada ρ , gelen dalgaya ait yansıma katsayısıdır. (4.1)'e göre $Z_2=Z_1$ olursa $\rho=0$ olur ve geri yansıma meydana gelmez. Bu, mikrostrip devre tasarımında çok karşılaşılan bir durumdur. Çünkü mikrostrip hattın empedansının bağlantı yapılacak mikrostrip devrenin empedansıyla uyumlu olması gerekir. Bu durumda mikrostrip hattın empedansının doğru bir şekilde hesaplanması gerekecektir.

Şekil 4.2'de bir mikrostrip iletim hattına ait kesit gösterilmektedir.



Şekil 4.2 : Mikrostrip Hattın Yandan Görünüşü

Şekil 4.2’de gösterilen mikrostrip hattın karakteristik empedansının yaklaşık değeri aşağıdaki formülle bulunur (Tisani, 2000).

$$Z_0 = (87 / \sqrt{\epsilon_r + 1.41}) \times \ln(5.98 \times h / (0.8 \times W + t)) \quad (4.2)$$

(4.2)’de verilen formül Şekil 4.2’deki mikrostrip hattın karakteristik empedansının doğru bir şekilde hesaplanmasını sağlar. Ancak mikrostrip hattın şekli değiştirildiğinde hattın karakteristik empedansını doğru olarak belirleyecek yeni bir formül bulunması gerekecektir. Bu işlemin zor olması nedeniyle yaklaşık formüller kullanmak yerine FDTD metodu ile analiz yapılarak mikrostrip hatta ait parametreler belirlenir.

FDTD ile mikrostrip hatlarda efektif dielektrik katsayısının frekans analizi en zor simülasyonlardan birisidir. Çünkü farklı frekanslarda dielektrik malzemenin işaret iletimine etkisi farklı olmaktadır. Efektif dielektrik katsayısı, hat üzerinde işaret fazının frekansla değişimi gözlenerek yapılır. Eğer uygulanan sınır şartları çok az da olsa geri yansıma meydana getiriyorsa FDTD metodu ile yapılan analiz sonuçları çok hatalı olabilmektedir Bu nedenle FDTD simülasyonu ile efektif dielektrik katsayısı hesabında parametre optimizasyonu ve etkili sınır şartları kullanılması zorunludur (Sevgi, 1999).

FDTD metodu ile mikrostrip hatların analizinde S parametreleri kullanılır. S parametreleri giden ve yansıyan akım ve gerilim dalgalarını birbirine bağlayan parametre takımıdır. FDTD metodu ile mikrostrip hatlı devrelerin S parametreleri ile simülasyonu yapılırken şu adımlar izlenir (Sevgi,1999).

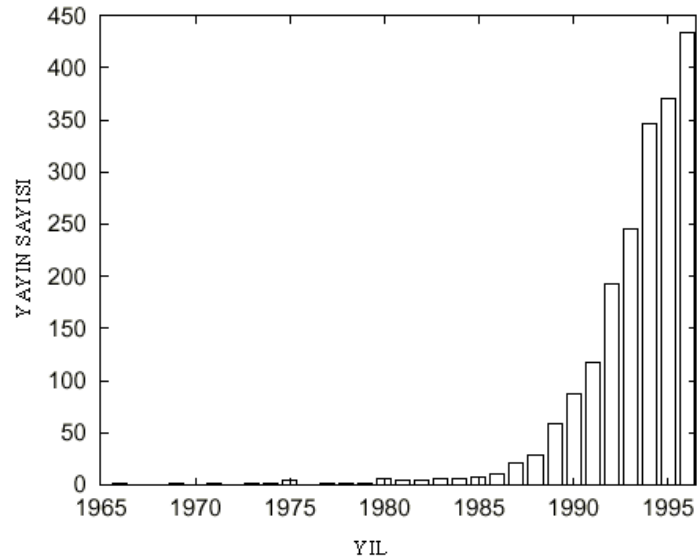
- ◆ Önce sınır şartları belirlenir.
- ◆ Gauss darbesi kullanılarak şerit altında düşey elektrik alan bileşeni uyarılır.
- ◆ FDTD simülasyonu boyunca devrenin giriş ve çıkışındaki gözlem noktalarından zamana bağlı işaretler gözlenir.
- ◆ S parametrelerinin hesabı için E ve H bileşenleri yardımıyla giden ve yansıyan akım ve gerilim dalgaları hesaplanır.
- ◆ Girişte ve çıkışta elde edilen giden ve toplam yansıyan dalgaların Fourier dönüşümleri alınarak devrenin S parametreleri elde edilir.

5 – ZAMAN DOMENİNDE SONLU FARKLAR (FDTD) METODU

5.1 – Giriş

Zaman Domeninde Sonlu Farklar (FDTD) yöntemi, elektromanyetik problemlerin çözümünde kullanılan en popüler sayısal yöntemlerden biridir. FDTD metodu 30 yılı aşkın bir süredir varolmasına rağmen, bilgisayar fiyatları düşmeye devam ettikçe, metodun popülaritesi artmaya devam edecektir. Ayrıca metodun geliştirilmesine yönelik yayınların artması da metodun çekiciliğini artırmaktadır. FDTD ile ilgili araştırma faaliyetlerinin çok fazla olmasından dolayı, FDTD literatürünün izlenmesi zor bir iştir.

İlk defa 1966'da Yee (Yee, 1966) tarafından ortaya atılan FDTD metodu, Maxwell denklemlerinin diferansiyel formunu ayrıklaştırmaya yarayan sade ve şık bir yöntemdir. Bununla birlikte orijinal FDTD metodundaki sorunlar, işlemci fiyatlarının azalmasıyla beraber azaltılmakta böylece metoda olan ilgi artmaktadır. Gerçekten FDTD metodu ile ilgili yayınların sayısı Şekil 5.1'de görüldüğü gibi son 10 yılda yaklaşık eksponansiyel olarak artmıştır.



Şekil 5.1 : Yıllara göre Yayın Sayısı

5.2 – FDTD Yöntemi

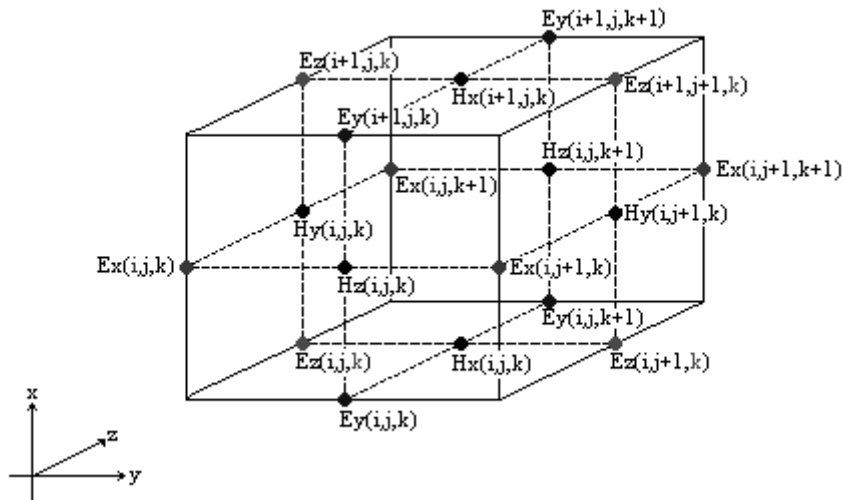
FDTD yöntemi, “zaman domeninde sonlu farklar” yöntemi olarak bilinir ve diferansiyel formdaki Maxwell denklemlerinin doğrudan zaman domeninde ayrıklaştırılıp çözülmesi esasına dayanır (Yee, 1966). İlk defa 1966 yılında Kane Yee tarafından ortaya atılan bu yöntem, uzayın seçilen ayırık noktalarında üç elektrik alan ve üç manyetik alan bileşeninin hesaplanabilmesini sağlar.

Karmaşık olmasına rağmen , Maxwell denklemlerinin anlaşılmasını sağlamak ve bilgisayarda işlemleri yürütmek için denklemlerin uygun bir forma dönüştürülmesi gerekir. İzole edilmiş yüklerin ve akımların olmadığı bir uzay bölgesi ele alınırsa Maxwell denklemleri şöyle yazılabilir.

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (5.2)$$

FDTD yönteminde (5.1) ve (5.2)'de verilen E ve H alanlarına ait denklemler ayrıklaştırılarak iteratif olarak çözdürülür. Bu amaçla, Yee tarafından önerilen Şekil 5.2'deki birim hücre kullanılarak 3 boyutta alan bileşenleri yerleştirilir (Yee, 1966).

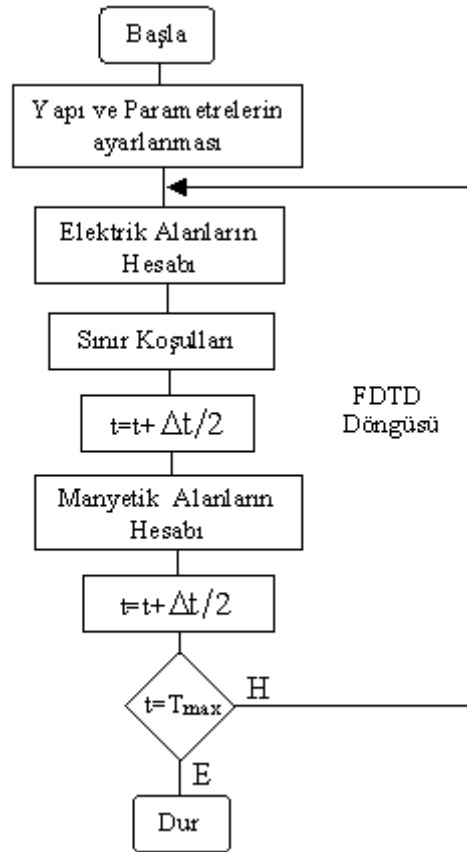


Şekil 5.2 : Yee Hücresinde Alan Bileşenlerinin Yerleşimi

5.3 – FDTD Algoritması

Gerçek bir problemde malzeme, her biri belirli μ ve ϵ değerine sahip olan ve uygun bir şekilde boyutlandırılmış Yee hücrelerine bölünerek kolayca analiz edilebilir. Alan bileşenlerinin hepsi için başlangıç değeri verilir. Daha sonra uygun bir cevap elde edilene kadar alan denklemleri iteratif olarak çözdürülür.

E değerleri $t = n \cdot \Delta t$ 'de ve H değerleri $t = (n + 1/2)\Delta t$ 'de güncelleştirilir. Ana döngü, zaman döngüsüdür ve seçilen maksimum zaman adımı tamamlanıncaya kadar ana zaman döngüsü çalıştırılır. (Şekil 5.3)



Şekil 5.3 : FDTD Algoritması

5.4 – FDTD Formülasyonu

Maxwell denklemlerindeki E ve B alanları için rotasyonel bağıntıları yazılırsa,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{ve} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

ve

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

bulunur. Vektörel çarpım için (5.3) eşitliği kullanılır.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (5.3)$$

Buna göre ;

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{\mu} \cdot \left[\vec{i} \cdot \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right] \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \left[\vec{i} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right] \quad (5.5)$$

elde edilir. Burada elektrik ve manyetik alanın üçer bileşeni bulunmaktadır.

Bunlar ;

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (5.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece 3 boyutlu FDTD denklemleri elde edilmiş olur. Bu denklemler kullanılarak tek boyutlu ve iki boyutlu FDTD denklemleri elde edilebilir. Bu denklemlere göre uzayın herhangi bir noktasındaki elektrik ve manyetik alan bileşenleri birbirlerine tamamen bağlıdır ve bu bağlılık ortamın manyetik geçirgenliği ve dielektrik sabitiyle de ilgilidir.

Elde edilen bu 6 adet denklem zamana bağlıdır. Bu denklemlerin bilgisayar ortamında çözülebilmesi için ayrıklaştırılması gerekir. Bu amaçla Taylor serisinden faydalanılarak merkezi sonlu farklar açılımı yapılır.

$u(i.\Delta x, j.\Delta y, k.\Delta z) = u_{i,j,k}^n$ olmak üzere, konuma göre ayrıklaştırma (5.12)'ye göre yapılır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - u^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \quad (5.12)$$

Zamana göre ayrıklaştırma için (5.13)'teki eşitlik kullanılır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - u^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (5.13)$$

3 adet manyetik alan ve 3 adet elektrik alan denklemi üzerinde konum ve zamanda ayrıklaştırma yapılırsa,

Manyetik alan için,

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_z^n(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right] \quad (5.14)$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_z^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_x^n(i, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \quad (5.15)$$

$$\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_x^n(i, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_y^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \right] \quad (5.16)$$

elde edilir.

Elektrik alan için

$$\frac{E_x^{n+1}(i, j, k) - E_x^n(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \quad (5.17)$$

$$\frac{E_y^{n+1}(i, j, k) - E_y^n(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \right] \quad (5.18)$$

$$\frac{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right] \quad (5.19)$$

elde edilir. Bu 6 adet denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

Manyetik alan için:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_z^n(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \right] \quad (5.20)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_x^n(i, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \quad (5.21)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_x^n(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_y^n(i-\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \right] \quad (5.22)$$

bulunur.

Elektrik alan için:

$$E_x^{n+1}(i,j,k) = E_x^n(i,j,k) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \cdot \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \quad (5.23)$$

$$E_y^{n+1}(i,j,k) = E_y^n(i,j,k) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \cdot \left[\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \right] \quad (5.24)$$

$$E_z^{n+1}(i,j,k) = E_z^n(i,j,k) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \cdot \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} \right] \quad (5.25)$$

denklemleri bulunmuş olur.

3.5 – Kararlılık Kriteri

FDTD yönteminde hesaplama zaman adımı olan Δt , rastgele seçilemez (Yee,1966). Δt değeri Δx , Δy ve Δz 'ye bağlı olarak seçilmelidir. Bunlar arasındaki bağıntı;

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (5.26)$$

ile verilir ve buna Courant şartı denir (Taflove ve Brodwin, 1975).

FDTD çözümünün kararlı olabilmesi için , seçilen zaman adımında dalganın maksimum ilerlemesi hücrenin boyutunu aşmamalıdır. Diğer bir deyişle, dalga hareketinin bir zaman adımında hücre içerisinde kalabilmesi için zaman adımı yeterince küçük seçilmelidir.

5.6 – Sınır Şartları

Açık bölge problemlerini modellemede ABC Emici Sınır Şartları, hesaplama alanını sınırlamak için sıkça kullanılır (Mur, 1981). Bu durumda hesaplama alanının dış sınırı boyunca elektrik alanın teğetsel bileşeni Yee algoritması kullanılarak güncellenmez. ABC sınır şartlarının önemsiz sayılabilecek düzeyde yansıma oluşturması için yapılan araştırmalar, (Mur, 1981; Higdon, 1986; Litva, 1992; Berenger, 1994) FDTD araştırmalarının en aktif alanlarından biridir ve olmaya devam edecektir. Popüler ABC sınır şartlarının çoğu, soğurucu malzeme kullananlar veya diferansiyel denklemlerden türetilenler olmak üzere guruplara ayrılmaktadır. 1994'te Berenger (Berenger, 1994) tarafından ileri sürülen PML (tam benzeşimli tabaka) tekniği, soğurucu malzeme olarak hesaba katılabilmektedir. Bununla birlikte formülasyonu, önceki sunulmuş ızgara sonlandırma tekniklerinden tamamen farklıdır. Uygulamada PML yaklaşımı, diğer ABC sınır şartlarının çoğundan daha doğru ve anlamlı sonuçlar vermektedir. Sonuçta PML tekniği, diğer tekniklerin karşılaştırma yapmak zorunda olduğu bir standart olmuştur.

5.7 – Alt Izgaralama (Subgridding)

FDTD yönteminde analiz edilecek olan yapı x , y ve z eksenleri boyunca binlerce küçük hücreye bölünür. Gerekli işlemlerden sonra, yapı içerisindeki elektromanyetik dalgaların ilerleyişi hakkında bilgiler elde edilir. Ancak elektrik ve manyetik alan değerlerinin fazla değişmediği yerlerde, yapının çok fazla hücreye bölünmesi işlem yükünü artırdığından dolayı gereksizdir. Bunun yerine alan değerlerinin hızlı değişim gösterdiği bölgelerde, köşelerde ve uç bölgelerde yapının daha fazla hücreye bölünmesiyle daha doğru ve verimli sonuçlar elde edilmektedir.

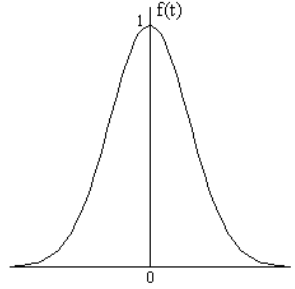
Alt ızgaralama tekniğinde, belirli bölümler problem uzayının geri kalan kısımlarından daha fazla hücreye bölünür. Bu teknik Yee, Kasher, Kim, Hoefler ve Zivanovic tarafından yapılan araştırmalarda ileri sürülmüştür (Yee, 1987; Kasher ve Yee, 1987; Kim ve Hoefler, 1990; Zivanovic, 1991). Bu tekniklerde temel sorun, büyük ve küçük boyutlu hücrelerin birleştirilmesinde ortaya çıkmaktadır.

Standart FDTD denklemleri bu iki ızgara arasındaki sınırdan uzak noktalarda güncellenir. Yee, Kasher, Kim ve Hoefler büyük ve küçük hücreler arasındaki sınırda alanın ilerleyişini sağlamak için, uzayda ve zamanda lineer bir enterpolasyon kullanmıştır. Monk, (Monk, 1987) alt ızgaralamanın hata analizini vermiştir. Zivanovic tarafından sunulan teknikte ızgaralar arasındaki sınırda alanların elde edilmesi için dalga denklemlerinin ayrık formu kullanılmıştır. Prescott ve Shuley ise Zivanovic'in tekniğini geliştirerek verimliliğini artırmıştır (Prescott ve Shuley, 1992).

1997 yılında da White (White, 1997) tarafından bu tekniğin 3 boyutlu problemlere uygulanması hakkında ayrıntılı açıklamalar verilmiştir.

5.8 – Gauss Fonksiyonu

FDTD metodu ile bir yapının geniş frekans bandında davranışını incelemek için kaynak olarak Gauss darbesi kullanılır. Şekil 5.4'de Gauss darbesinin zamana bağlı değişimi görülmektedir.

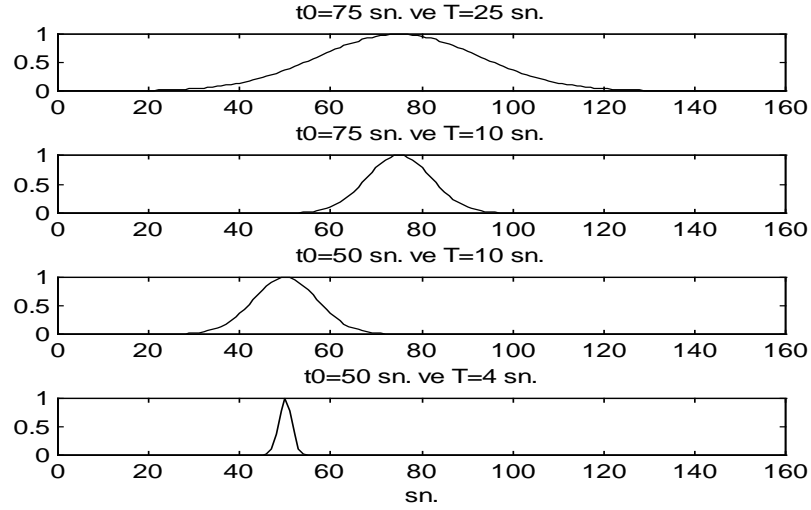


Şekil 5.4: Gauss Darbesi

Gauss darbesinin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$f(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{T^2}} \quad (5.27)$$

Burada t_0 , darbenin gecikme süresini belirtir. t_0 değeri ne kadar küçükse darbe o kadar erken oluşur. T ise darbenin genişliğini belirler. T ne kadar küçük ise darbe o kadar keskin , T ne kadar büyükse darbe o kadar geniş olur. Bu durum Şekil 5.5'de görülmektedir.



Şekil 5.5 : Parametrelerin Gauss Darbesine Etkisi

Gauss fonksiyonunun Fourier dönüşümü de Gauss fonksiyonudur. Zaman - bant genişliği çarpımı sabit olduğundan, zamanda daralan Gauss darbesinin frekans bandı genişler.

Gauss darbesi alçak frekansları da (DC bileşen) içeren frekans bandına sahiptir. Bu nedenle , çok alçak frekanslardan istenen en yüksek frekanslara kadar analizlerde Gauss darbesi kullanmak elverişlidir (Sevgi, 1999)

$f(t) = e^{-\frac{t^2}{T^2}}$ ile verilen Gauss darbesinin Fourier Dönüşümü aşağıdaki gibidir.

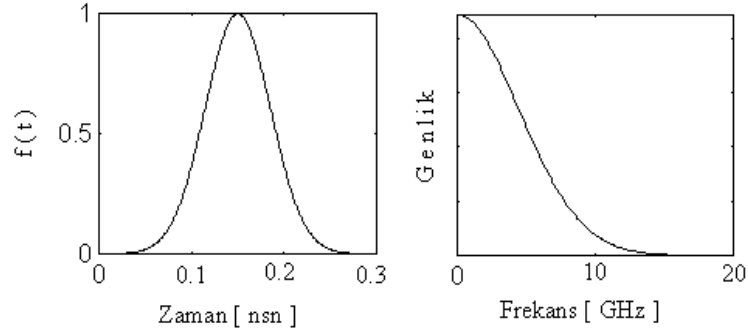
$$F(w) = T \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{T^2 \cdot w^2}{4}} \quad (5.28)$$

Bant genişliği, frekans domeninde darbe genliğinin maksimum değerinin %5'ine düştüğü frekans aralığı olarak tanımlanır (Sevgi, 1999). (5.28) bağıntısına göre Gauss darbesinin bant genişliği , darbe süresine bağlıdır. Bundan yararlanarak, analiz edilecek en yüksek frekans için uygun darbe süresi seçilir.

Darbe süresi ile en yüksek frekans bileşeni arasındaki bağıntı yaklaşık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir (Krishnaiah, 1995).

$$f_{\max} = \frac{0.66}{T} \quad (5.29)$$

Şekil 5.6'da parametreleri $T = 50$ psn. ve $t_0 = 3T$ olan Gauss darbesinin zaman ve frekans davranışları görülmektedir. (5.29)'e göre en yüksek frekans bileşeni $f = 13.2$ GHz. olarak hesaplanır. Bu durum Şekil 5.6'dan görülmektedir.



Şekil 5.6 : Gauss Darbesi ve Fourier Dönüşümü

5.9 – FDTD Metodunun Uygulama Alanları

Günümüzde FDTD yöntemi, çok farklı elektromanyetik problemlerin çözümü için kullanılmaktadır. Bu alanlardaki çalışmalar şöyle sıralanabilir.

- ◆ Mikrostrip hatların analizi
- ◆ Dalga kılavuzlarındaki yayılımın modellenmesi
- ◆ Anten sistemlerinin modellenmesi
- ◆ Radar saçılma yüzeyi (RSY) modelleme
- ◆ Biyolojik dokularda elektromanyetik yutulma hesapları
- ◆ Mikrodalga yapıların analizi
- ◆ Elektromanyetik uyumluluk ve girişim (EMC/EMI) modelleme

FDTD metodu ile düzlemsel mikrostrip devrelerin analizinde D .Paul, M. Daniel , C. J. Railton (Paul ve diğ., 1991), J.P.Mcgeehan (Railton ve McGeehan, 1990) adlı araştırmacıların, analiz zamanını kısaltan ve optimize edilmiş sınır şartlarını veren yayınları bulunmaktadır. D.M. Sheen ve S.M.Ali düzlemsel mikrostrip devrelerin 3 boyutlu analizini yaparak frekansa bağımlı saçılma parametrelerini elde etmiştir (Sheen ve Ali, 1990).

P.Y. Zhao , J. Litva, Li Wu (Zhao ve diğ., 1994) tarafından yeni ve kararlı bir sınır koşulu geliştirilmiş, böylece ABC sınır şartına göre daha iyi soğurma performansı elde edilmiştir. L.Roselli, R.Sorrenino, P.Mezzanotte (Mezzanotte ve diğ., 1994) tarafından yüksek performanslı monolitik mikrodalga devre paketlerinin simülasyonu yapılmıştır.

B.Toland, J.Lin, B. Houshmand, T. Itoh (Toland ve diğ., 1993) tarafından iki elemanlı bir aktif antenin analizi yapılarak aktif ve nonlineer devrelerin kararlı ve geniş sinyal simülasyonları verilmiştir. Z. Chen, M. Ney, J. Hoefler (Chen ve diğ., 1991) tarafından da Yee'nin FDTD metodundan farklı bir formülasyon geliştirilerek TLM eşdeğeri verilmiştir.

Görüldüğü gibi, farklı elektromanyetik problemlerin çözümünde FDTD yöntemi sıkça kullanılmakta olup, literatürde yöntemin geliştirilmesine ve iyileştirilmesine yönelik pek çok yayın bulunmaktadır.

6 – FDTD METODU İLE TEK BOYUTLU SİMÜLASYON

FDTD yöntemi ile tek boyutlu yapıların simülasyonu yapılarak, hücre yapısının daha kolay anlaşılması ve zaman domeninde darbe iletiminin kolayca görülmesi sağlanır. Ayrıca iteratif denklemler, kararlılık kriteri, sayısal dispersiyon gibi kavramların daha iyi anlaşılması için tek boyutlu yapıların incelenmesi gerekir.

6.1 – Serbest Uzayda Dalga Yayılımı

Boş uzayda, Maxwell'in rotasyonel denklemleri şöyledir.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (6.2)$$

\vec{E} ve \vec{H} üç boyutlu vektörler olduğundan, (6.1) ve (6.2) denklemlerinin her biri 3 denkleme temsil eder. Tek boyutta elektrik ve manyetik alana ait birer bileşen bulunur. Buna göre E_x ve H_y dışındaki alan bileşenleri sıfır alınır,

$$E_y = E_z = 0 \quad (6.3)$$

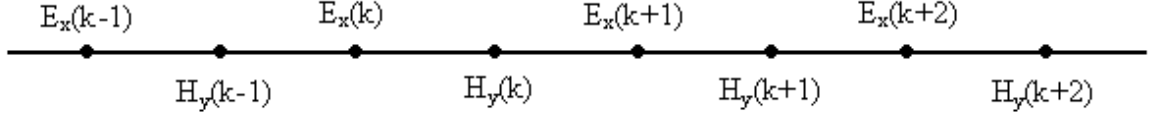
$$H_x = H_z = 0 \quad (6.4)$$

olur. Böylece tek boyutlu FDTD denklemleri şu hale gelir.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (6.6)$$

Bu denklemler elektrik alanı x yönünde, manyetik alanı y yönünde olan ve z yönünde ilerleyen bir düzlemsel dalgaya aittir. Yee hüresine göre, tek boyutlu durumda alan bileşenleri bir doğru parçası üzerinde bulunurlar (Şekil 6.1).



Şekil 6.1: Tek Boyutta Alan Bileşenlerinin Yerleşimi

Şekil 6.1'den görüldüğü gibi elektrik ve manyetik alan bileşenleri aynı indisle belirtilse de aralarında yarım hücre boyu mesafe vardır.

Zamana ve konuma göre türevler için merkezi farklar yaklaşımı kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial z} \Rightarrow \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \Rightarrow \frac{H_y^{n+1}(k) - H_y^n(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \quad (6.8)$$

Bu denklemlerde, n terimi zamanı belirtmektedir ve gerçekte kastedilen $t = n \cdot \Delta t$ zamanıdır. n+1 terimi de bir adım sonraki zamanı gösterir. Parantez içindeki terimler ise mesafeyi göstermektedir.

Burada önemli bir konu ayrıklaştırma sırasında kullanılan zaman ve konuma ait indislerdir. Ayrıklaştırma işlemine hangi alan bileşeninden başlanırsa, o bileşene ait zaman ve konum indisleri referans olarak alınır ve elektrik alan ile manyetik alan arasında yarım zaman adımı fark vardır.

Buna göre tek boyutlu denklemler 2 şekilde yazılabilir.

1- Önce E alanı yazılırsa;

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial z} \Rightarrow \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \Rightarrow \frac{H_y^{n+1}(k) - H_y^n(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \quad (6.10)$$

2- Önce H alanı yazılırsa ;

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \Rightarrow \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_x^n(k + \frac{1}{2}) - E_x^n(k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial z} \Rightarrow \frac{E_x^{n+1}(k) - E_x^n(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \quad (6.12)$$

Görüldüğü gibi ayrıklaştırma işlemine hangi alan bileşeninden başlandığı önemlidir.

E alanının önce ayrıklaştırılması sonucu elde edilen (6.9) denklemindeki önemli noktalar şöyle sıralanabilir.

$$\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2})}{\Delta z}$$

E alanında $n + \frac{1}{2}$ ve $n - \frac{1}{2}$ indisleri ile işleme başlanır. Bu iki zamanın orta noktası n 'dir. Dolayısıyla H alanı için n anındaki değerler kullanılır. E alanı k konumunda iken H alanı $k + \frac{1}{2}$ konumunda bulunur.

Buradan H alanına ait (6.10) denklemine geçilirken yarım zaman adımı arttırılır.

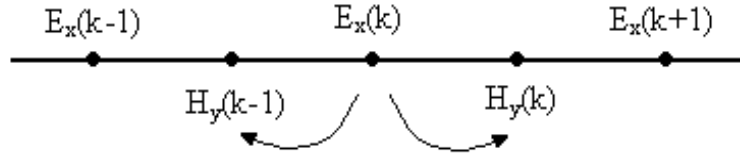
$$\frac{H_y^{n+1}(k) - H_y^n(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(k - \frac{1}{2})}{\Delta z}$$

Böylece $n + \frac{1}{2}$ ve $n - \frac{1}{2}$ değerleri $n+1$ ve n şekline dönüşür. $n+1$ ve n değerlerinin orta noktası $n + \frac{1}{2}$ olduğu için ikinci denklemden E alanı için $n + \frac{1}{2}$ değeri kullanılır.

Tek boyutlu durumda E_x bileşeni için elde edilen (6.9) denklemini düzenlenirse

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \cdot \Delta z} \cdot \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \quad (6.13)$$

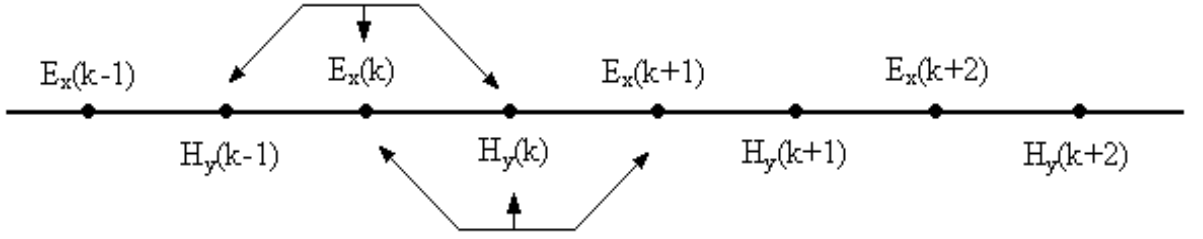
elde edilir. (6.13)'e göre, E_x alanının $n + \frac{1}{2}$ anındaki yeni değeri, 1 zaman adımı önce aynı noktadaki E_x değerine ve önceki değerden yarım zaman adımı sonra hesaplanan komşu H_y alanlarının değerlerine bağlıdır. Bu durum Şekil 6.2'den görülmektedir.



Şekil 6.2 : E_x Alanının Hesabında Kullanılan Alan Bileşenleri

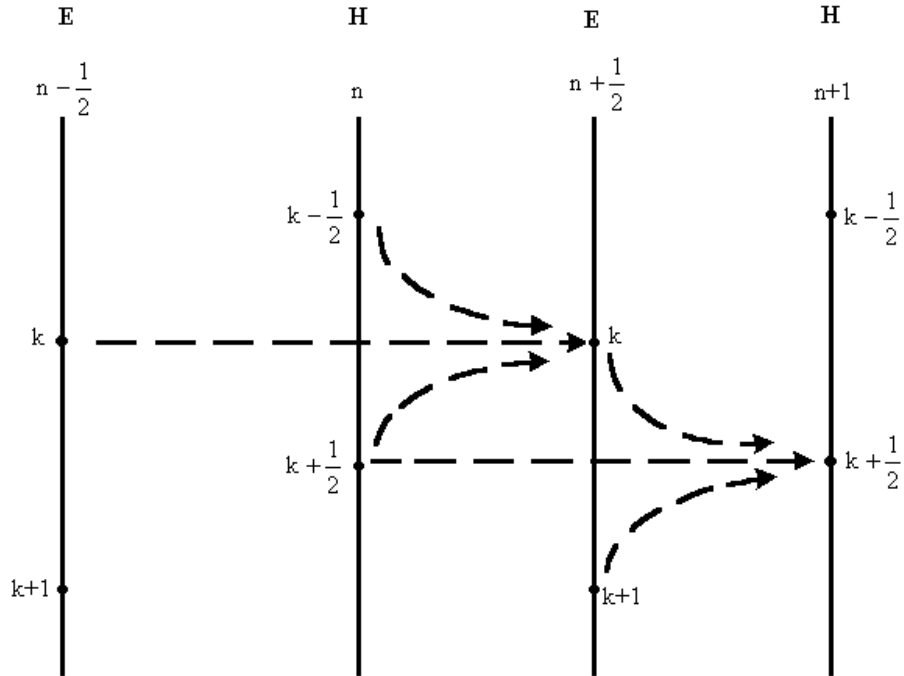
Şekil 6.2'de görülen indisler artık $k-1$ ve k değil, referans noktası k alındığı için $k - \frac{1}{2}$ ve $k + \frac{1}{2}$ 'dir.

Ez ve H_y alanlarının hesabı için gerekli alan bileşenleri Şekil 6.3'den görülmektedir. Şekle göre alan bileşenlerinin yeni değeri, aynı konumdaki 1 zaman adımı önceki değerine de bağlı olduğu için hesap sırasında alan bileşenlerinin önceki değerleri hafızada tutulmalıdır.



Şekil 6.3 : E_x ve H_y Bileşenlerinin Hesabında Kullanılan Alan Bileşenleri

Tek boyutlu durumda alan bileşenlerinin hesabı sırasında hem konum hem de zaman değerleri değiştiği için Şekil 6.4'ün kullanılması daha anlaşılır olmaktadır.



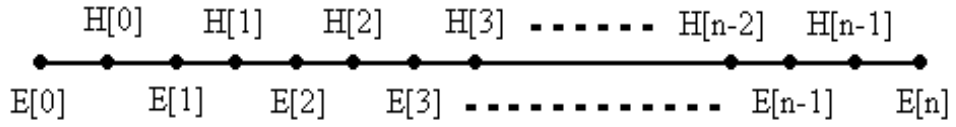
Şekil 6.4 : E_x ve H_y Alanlarının Zaman ve Konuma Göre Yerleşimi

(6.9) ve (6.10) denklemleri düzenlenirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \cdot \Delta z} \cdot \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \quad (6.14)$$

$$H_y^{n+1}(k) = H_y^n(k) - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta z} \cdot \left[E_x^{n+\frac{1}{2}}(k + \frac{1}{2}) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(k - \frac{1}{2}) \right] \quad (6.15)$$

Elde edilen denklemlerin bilgisayar programında yazılacak formata getirilmesi için gerekli işlemler aşağıdaki gibi yapılır. Alan bileşenlerinin yerleşimi için Şekil 6.5 kullanılır.



Şekil 6.5 : Tek Boyutta Alan Bileşenlerinin Konuma Göre Yerleşimi

E ve H alanları için elde edilen (6.14) ve (6.15) denklemlerinden yararlanarak her alan bileşeni için gerekli eşitlikler yazılırsa,

E alan bileşenleri için:

$$E[0] = E[0] - \frac{\Delta t}{\varepsilon \cdot \Delta z} \cdot (H[0] - H[?])$$

$$E[1] = E[1] - \frac{\Delta t}{\varepsilon \cdot \Delta z} \cdot (H[1] - H[0])$$

$$E[n-1] = E[n-1] - \frac{\Delta t}{\varepsilon \cdot \Delta z} \cdot (H[n-1] - H[n-2])$$

$$E[n] = E[n] - \frac{\Delta t}{\varepsilon \cdot \Delta z} \cdot (H[?] - H[n-1])$$

elde edilir.

H alan bileşenleri için:

$$H[0] = H[0] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta z} \cdot (E[1] - E[0])$$

$$H[1] = H[1] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta z} \cdot (E[2] - E[1])$$

$$H[n-1] = H[n-1] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta z} \cdot (E[n] - E[n-1])$$

$$H[n] = H[n] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta z} \cdot (E[?] - E[n])$$

elde edilir. Yukarıda yazılan eşitliklerden görüldüğü gibi uç noktalarda E ve H alanlarına ait değerler bulunmadığından E[0], E[n] ve H[n] değerleri hesaplanamaz.

Bilgisayarda sayısal olarak hesaplanması gereken denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

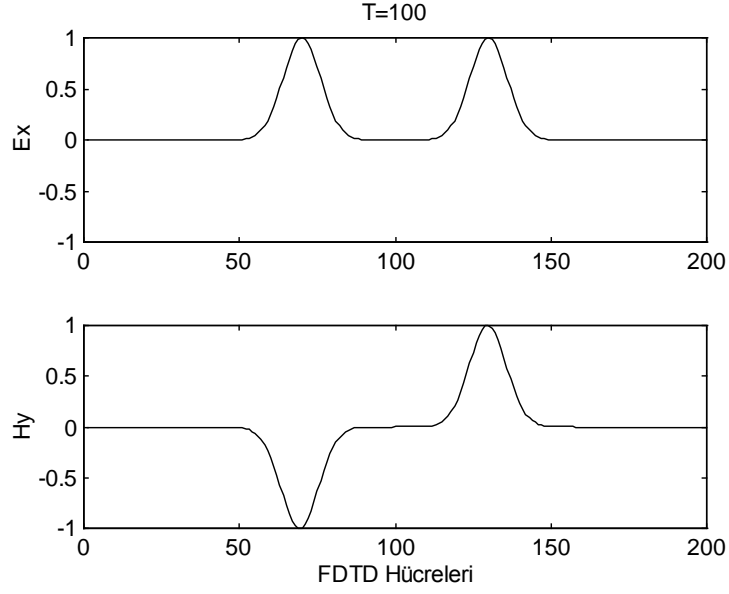
$$E[k] = E[k] - \frac{\Delta t}{\varepsilon \cdot \Delta z} \cdot (H[k] - H[k-1]) \quad (6.16)$$

(6.16) denklemindeki işlem k=1 ile k<n arasındaki tamsayılar için yapılır.

$$H[k] = H[k] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta z} \cdot (E[k+1] - E[k]) \quad (6.17)$$

(6.17) denklemindeki işlem k=0 ile k<n arasındaki tamsayılar için yapılır.

(6.16) ve (6.17) denklemlerindeki işlemler bilgisayarda iteratif olarak çözdürülerek tek boyutta alan bileşenlerinin zamana ve konuma bağlı değişimi görülmüş olur. Şekil 6.6'ya göre Gauss darbesi problem uzayının merkezinde oluşturulmuştur. Darbenin pozitif ve negatif yönlere doğru ilerlediği görülmektedir.



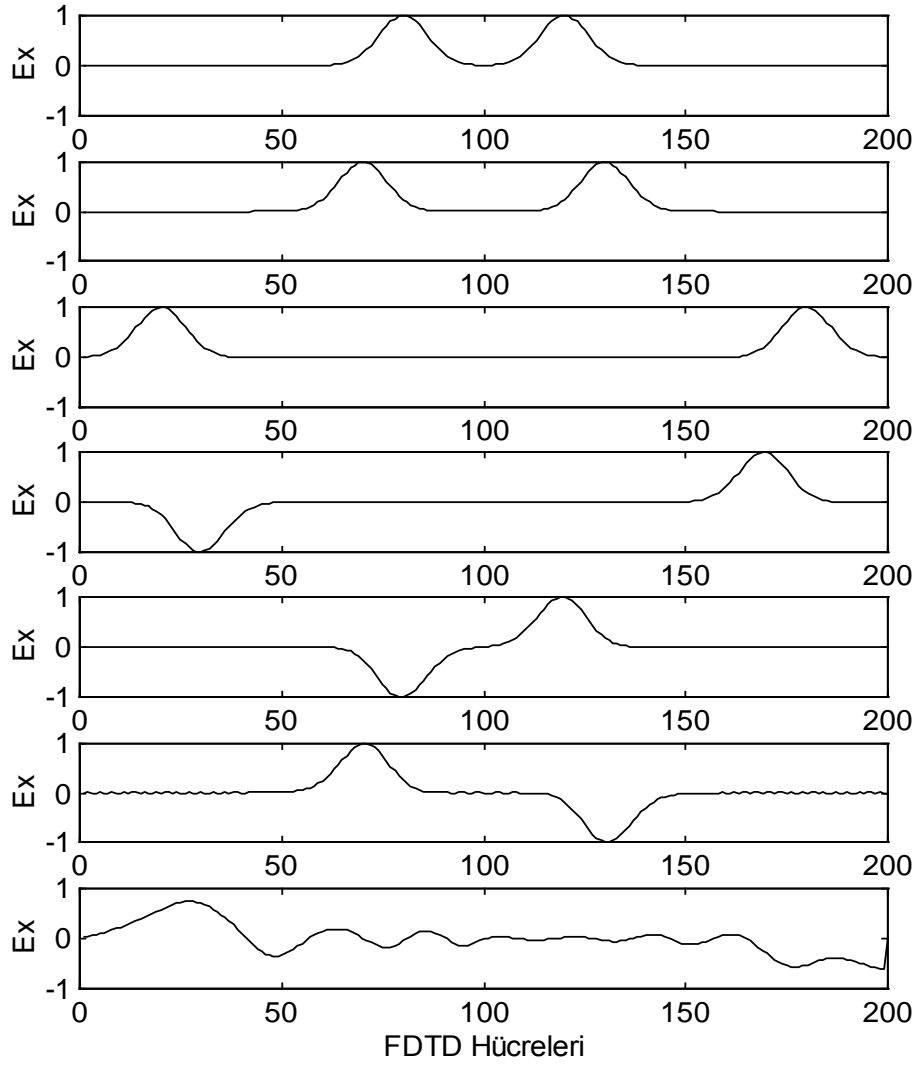
Şekil 6.6 : 100 Zaman Adımı Sonunda E_x ve H_y Alanlarının Durumu

6.1.1 – Simülasyon Sonuçları

Tek boyutlu FDTD simülasyonu için gerekli bağıntılar elde edildikten sonra, bilgisayarda çözülmesi gereken denklemler için bir C++ programı yazılmış ve çeşitli zaman adımlarında Gauss darbesinin nasıl ilerlediği hakkında bilgi edinilmiştir.

Problem uzayının uç noktalarında herhangi bir sınır şartı kullanılmadığı için, problem uzayının içine geri yansımalar olduğundan programın bu haliyle kullanılması yanlış sonuçlara neden olur.

Şekil 6.7'den görüldüğü gibi 15.000 zaman adımı sonunda bile problem uzayı içinde darbe yayılımı devam etmektedir.



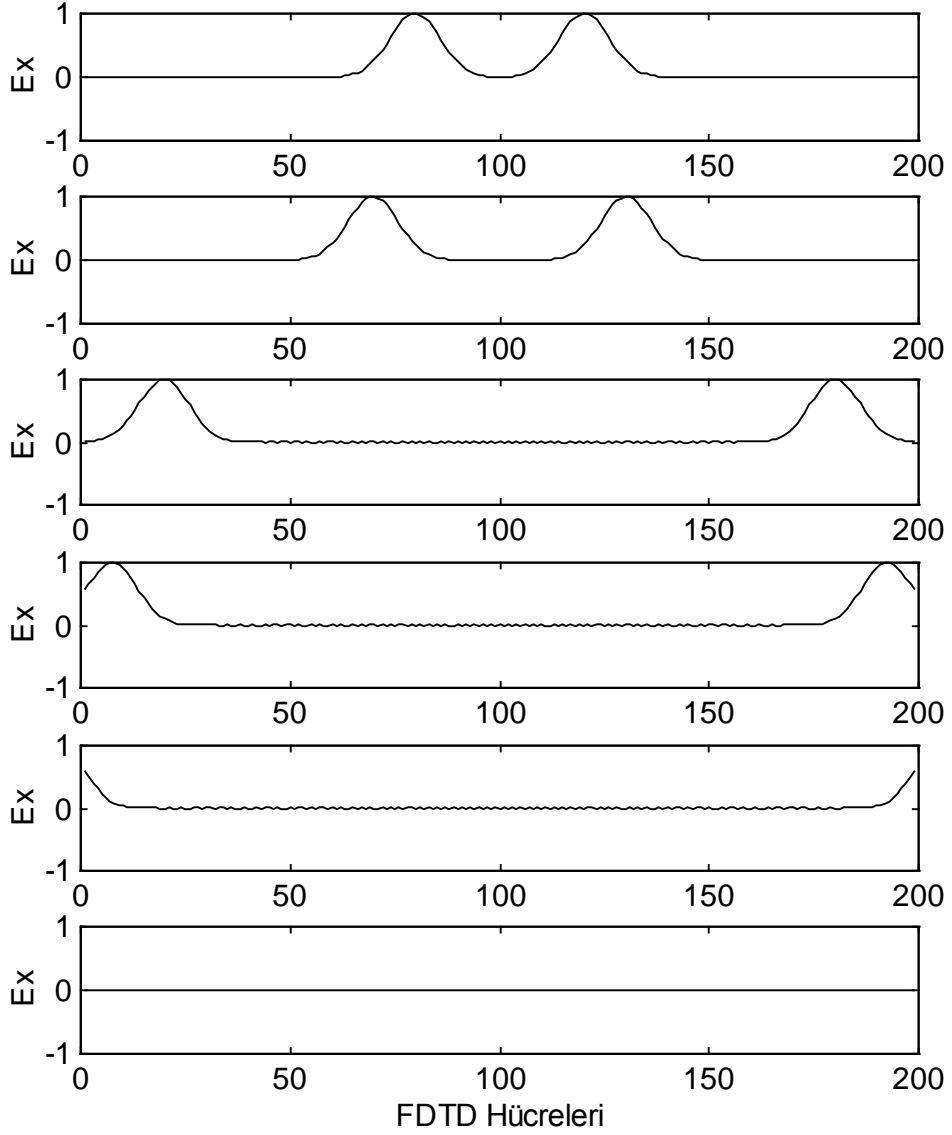
Şekil 6.7 : Sınır Şartları Yokken $T= 80, 100, 200, 300, 400, 500$ ve 15000 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu

6.2 – Tek Boyutta Sınır Şartları

ABC sınır şartları, ilerleyen E ve H alanlarının problem uzayı içine geri yansımalarını önlemek için kullanılır. Normalde E alanının hesaplanmasında, E alanı çevresindeki H alanlarına ihtiyaç duyulur. Bu FDTD metodunun temel yaklaşımıdır. Problem uzayının uç noktalarında, bir taraftaki alan değerleri bilinmemektedir. Bununla birlikte problem uzayı dışında kaynak olmadığı bilinmektedir. Bu nedenle dalgalar uç noktalardan dışarıya doğru yayılmalıdır. Bu durumda uç noktalardaki değerlerin tahmin edilmesi gerekecektir.

6.2.1 – Simülasyon Sonuçları

Sınır şartları kullanıldığı durumda, Gauss darbesinin problem uzayının sonundan geri yansımadan ilerlediği görülmektedir (Şekil 6.8).



Şekil 6.8 : Sınır Şartları Varken $T=80$, 100 , 200 , 225 ve 250 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu

6.3 – Dielektrik Ortamda Dalga Yayılımı

Dielektrik sabite sahip olan bir ortamın simüle edilebilmesi için Maxwell denklemlerine ϵ_r katsayısını eklemek yeterlidir. Bu durumda Maxwell denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (6.19)$$

Sonlu farklar açılımı kullanılarak (6.18) ve (6.19) denklemleri düzenlenirse,

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{k}) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{k}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \Delta z} \cdot \left[H_y^n(\mathbf{k} + \frac{1}{2}) - H_y^n(\mathbf{k} - \frac{1}{2}) \right] \quad (6.20)$$

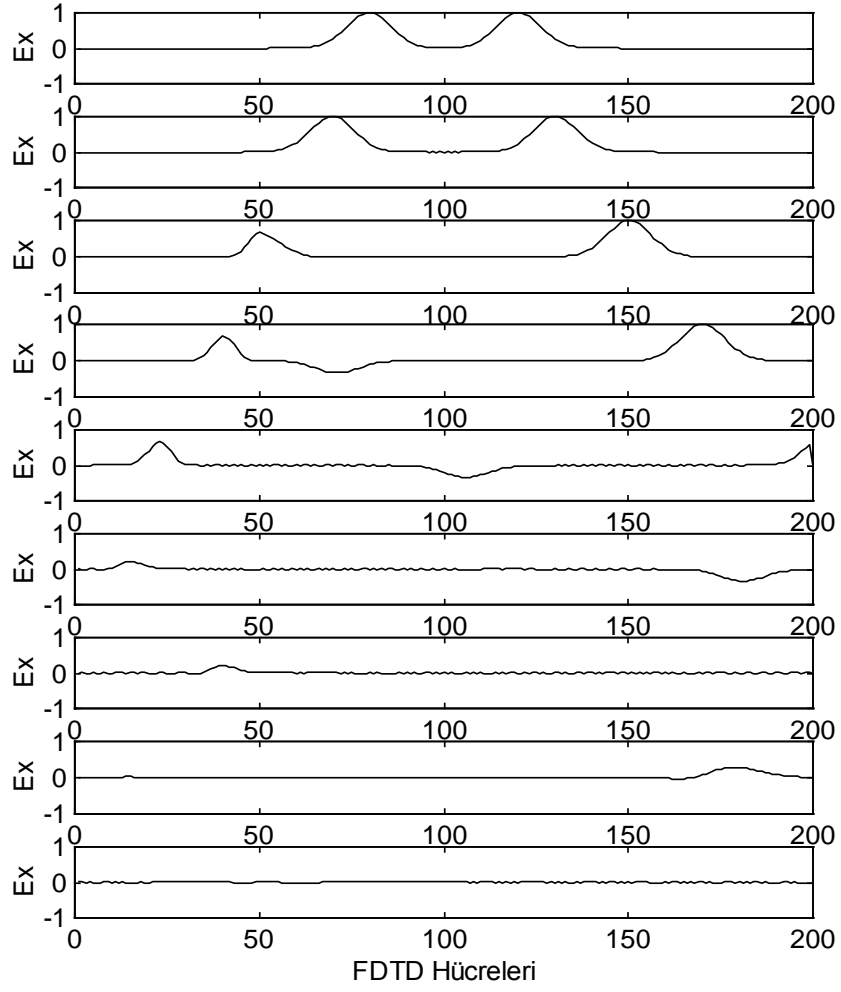
$$H_y^{n+1}(\mathbf{k}) = H_y^n(\mathbf{k}) - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta z} \cdot \left[E_x^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{k} + \frac{1}{2}) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{k} - \frac{1}{2}) \right] \quad (6.21)$$

elde edilir.

6.3.1 – Simülasyon Sonuçları

Yapının bir kısmı dielektrik sabiti boşluğunkinden farklı olan bir malzeme ile kaplı iken Gauss darbesinin ilerleyişi tamamen değişir.

Gauss darbesi iki farklı ortamın birleşme bölgesinden geçerken, darbenin bir kısmı geri yansır. Bir kısmı ise yavaşlayarak malzeme içerisinde ilerler. Bu durum şekil 6.9'dan görülmektedir.



Şekil 6.9 : 1 - 50 Nolu Hücreler Arasında Dielektrik Sabiti 4 Olan Bir Malzeme Varken , $T= 80 , 100, 140, 180 , 250 , 400$ ve 500 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu

7. FDTD METODU İLE 2 BOYUTLU SİMÜLASYON

Maxwell denklemlerindeki Elektrik ve Manyetik alana ait rotasyonel denklemlerinin üç boyuttaki toplam 6 adet bileşeni bölüm 5'te elde edildiği gibi yazılırsa, Manyetik alan için:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

elde edilir. Elektrik alan için;

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

elde edilir.

2 boyutlu denklemlerde alan bileşenleri bir düzlem üzerinde bulunur. Yani x, y, z yönündeki alan bileşenlerinden bir tanesinin değişimi sıfırdır. Örneğin z yönünde hiçbir değişim olmadığı kabul edilirse, yani $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ise 6 adet denklem şu şekle gelir.

Manyetik alan bileşenleri ;

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (7.3)$$

olur. Elektrik alan bileşenleri;

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (7.6)$$

olur. 2 boyutlu analiz için bu denklemlerden sadece 3'ü kullanılır. 6 adet denklem üçer bileşen içeren 2 guruba ayrılır. Bir guruptaki alan bileşenleri TM modunu, diğer guruptaki alan bileşenleri TE modunu oluşturur.

7.1 İki Boyutta Modlar

7.1.1 TM Modu

TM modunda, elektromanyetik dalganın ilerleme yönünde manyetik alanın bileşeni yoktur. Ancak elektrik alanının hem eksen doğrultusunda hem de eksene dik bileşenleri vardır. Bu gruptaki denklemler sadece H_x , H_y ve E_z alan bileşenlerini içerir. Bu durumda TM modu için denklemler (7.1), (7.2) ve (7.6) denklemlerinden oluşur.

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

7.1.2 TE Modu

TE modunda, elektromanyetik dalganın ilerleme yönünde elektrik alanın bileşeni yoktur. Ancak manyetik alanın hem eksen doğrultusunda hem de eksene dik bileşenleri vardır. Bu gruptaki denklemler sadece E_x , E_y ve H_z alan bileşenlerini içerir. Bu durumda TE modu için denklemler (7.3), (7.4) ve (7.5) denklemlerinden oluşur.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

Görüldüğü gibi TM ve TE modları birbirinden ayrıdır. Yani ortak alan bileşenleri yoktur. TM ve TE modları, 2 boyutlu elektromanyetik alan etkileşimi problemlerinin oluşturulması için 2 farklı yoldur. 2 modla birleştirilen fiziksel olaylar çok farklı olabilir. Bu aslında modellenen sonsuz uzun yapının yüzeyiyle ilişkili elektrik ve manyetik alan çizgilerinin yönelimi nedeniyledir. TE modunda elektrik alan çizgileri iletim yönüne dik iken TM modunda manyetik alan çizgileri iletim yönüne diktir.

7.2 TM Modu İçin Formülasyon

2 boyutlu TM modu için alan denklemleri yazılırsa,

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

elde edilir. Burada elektrik ve manyetik kayıpların olmadığı varsayılmıştır. Problemi daha basitleştirmek için FDTD hesap uzayının homojen bir malzeme ile dolu olduğu kabul edilecektir. Yani konuma bağlı olarak μ ve ε değerleri değişmemektedir.

2 boyutlu TM modu için yazılan denklemler, merkezi sonlu farklar açılımı yardımıyla ayrıklaştırılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \quad (7.7)$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_z^n(i + \frac{1}{2}, j) - E_z^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \quad (7.8)$$

$$\frac{E_z^{n+1}(i, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \quad (7.9)$$

7.3 TE Modu İçin Formülasyon

2 boyutlu TE modu için alan denklemleri yazılırsa,

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

elde edilir. Bu denklemler, merkezi sonlu farklar açılımı yardımıyla ayrıklaştırılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

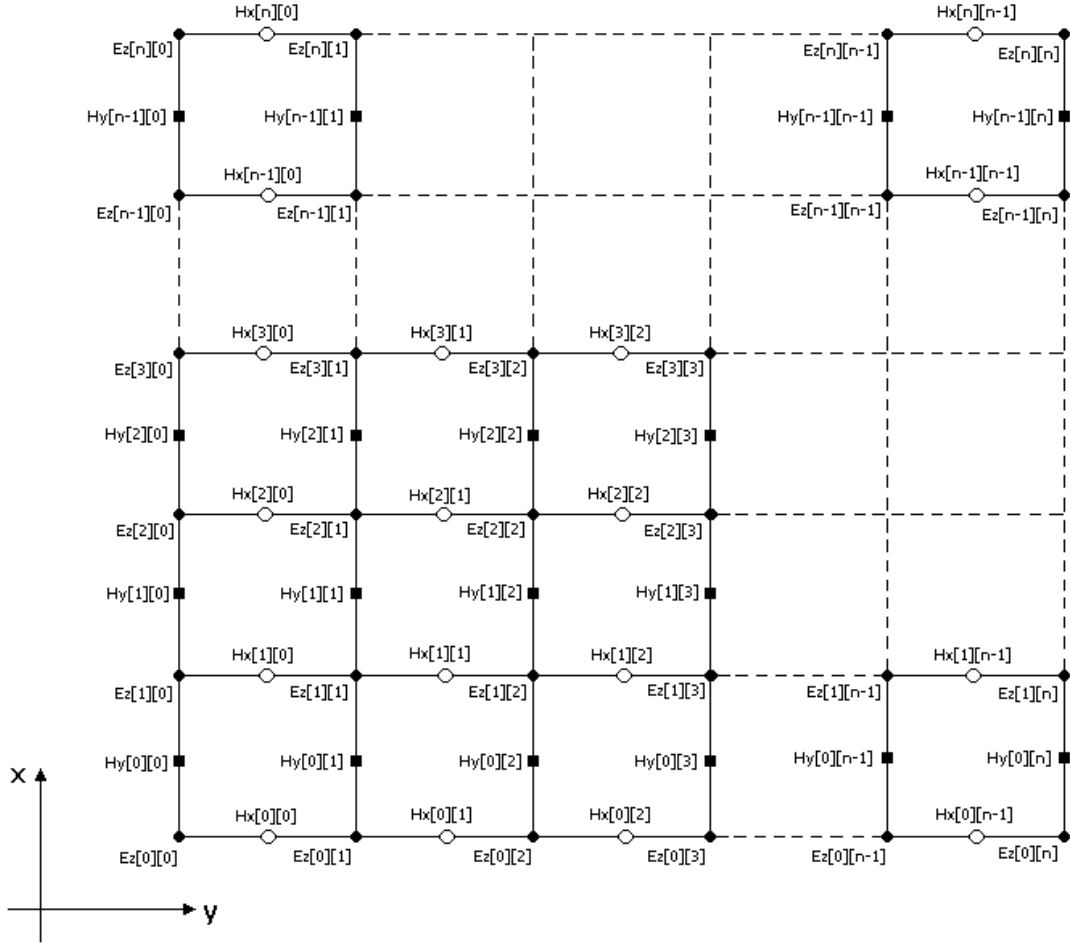
$$\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{H_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - H_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \quad (7.10)$$

$$\frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{H_z^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_z^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \quad (7.11)$$

$$\frac{H_z^{n+1}(i, j) - H_z^n(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} - \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - E_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right) \quad (7.12)$$

7.4 TM Modu İçin Hücre Yerleşim Planı

TM modundaki H_x , H_y ve E_z alan bileşenleri x-y düzleminde yerleştirilecek olursa Şekil 7.1'deki yerleşim planı elde edilir.



Şekil 7.1 : TM Modu İçin 2 Boyutta Alan Bileşenlerinin Yerleşimi

TM modu için elde edilen (7.7), (7.8) ve (7.9) denklemlerinde gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j) - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta y} \cdot \left[E_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j - \frac{1}{2}) \right] \quad (7.13)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j) + \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta x} \cdot \left[E_z^n(i + \frac{1}{2}, j) - E_z^n(i - \frac{1}{2}, j) \right] \quad (7.14)$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (7.15)$$

E ve H alanları için elde edilen denklemlerden yararlanarak her alan bileşeni için gerekli eşitlikler yazılırsa, H_x alan bileşenleri için:

$$H_x[0][0] = H_x[0][0] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta y} \cdot [E_z[0][1] - E_z[0][0]]$$

$$H_x[1][0] = H_x[1][0] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta y} \cdot [E_z[1][1] - E_z[1][0]]$$

$$H_x[n][n-1] = H_x[n][n-1] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta y} \cdot [E_z[n][n] - E_z[n][n-1]]$$

elde edilir. H_y alan bileşenleri için;

$$H_y[0][0] = H_y[0][0] + \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta x} \cdot [E_z[1][0] - E_z[0][0]]$$

$$H_y[1][0] = H_y[1][0] + \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta x} \cdot [E_z[2][0] - E_z[1][0]]$$

$$H_y[n-1][n] = H_y[n-1][n] + \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta x} \cdot [E_z[n][n] - E_z[n-1][n]]$$

elde edilir. E_z alan bileşenleri için;

$$E_z[0][0] = E_z[0][0] + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{H_y[0][0] - H_y[?][?]}{\Delta x} - \frac{H_x[0][0] - H_x[?][?]}{\Delta y} \right]$$

$$E_z[1][1] = E_z[1][1] + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{H_y[1][1] - H_y[0][1]}{\Delta x} - \frac{H_x[1][1] - H_x[1][0]}{\Delta y} \right]$$

$$E_z[n][n] = E_z[n][n] + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{H_y[?][?] - H_y[n-1][n]}{\Delta x} - \frac{H_x[?][?] - H_x[n][n-1]}{\Delta y} \right]$$

elde edilir.

Yukarıda yazılan eşitliklerden görüldüğü gibi kenarlarda bulunan E_z bileşenleri hesaplanamaz. Ayrıca $E_z[n][n]$ değeri bulunduğu halde $H_x[n][n]$ ve $H_y[n][n]$ değerleri bulunmaz.

Buna göre bilgisayarda sayısal olarak hesaplanması gereken denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H_x[i][j] = H_x[i][j] - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta y} \cdot [E_z[i][j+1] - E_z[i][j]] \quad (7.16)$$

(7.16) denklemindeki işlemde H_x bileşeni hesaplanırken i değişkeni 0 ile n arasında, j değişkeni ise 0 ile $n-1$ arasında tamsayı değerler alabilir.

$$H_y[i][j] = H_y[i][j] + \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta x} \cdot [E_z[i+1][j] - E_z[i][j]] \quad (7.17)$$

(7.17) denkleminde H_y bileşeni hesaplanırken i değişkeni 0 ile $n-1$ arasında, j değişkeni ise 0 ile n arasında tamsayı değerler alabilir.

$$E_z[i][j] = E_z[i][j] + \frac{\Delta t}{\epsilon} \cdot \left[\frac{H_y[i][j] - H_y[i-1][j]}{\Delta x} - \frac{H_x[i][j] - H_x[i][j-1]}{\Delta y} \right] \quad (7.18)$$

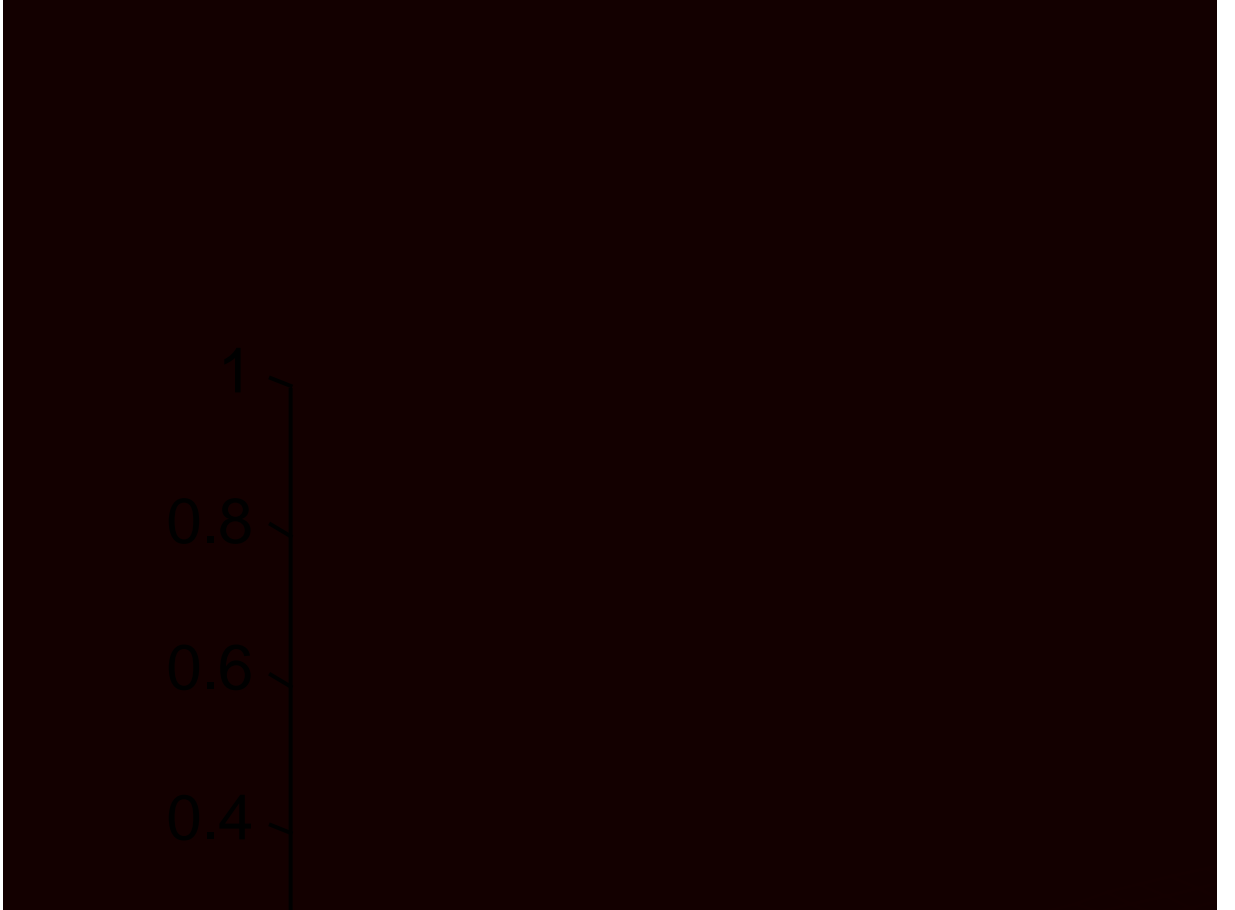
(7.18) denkleminde E_z bileşeni hesaplanırken i değişkeni 1 ile $n-1$ arasında, j değişkeni ise 1 ile $n-1$ arasında tamsayı değerler alabilir.

8. İKİ BOYUTLU SİMÜLASYON SONUÇLARI

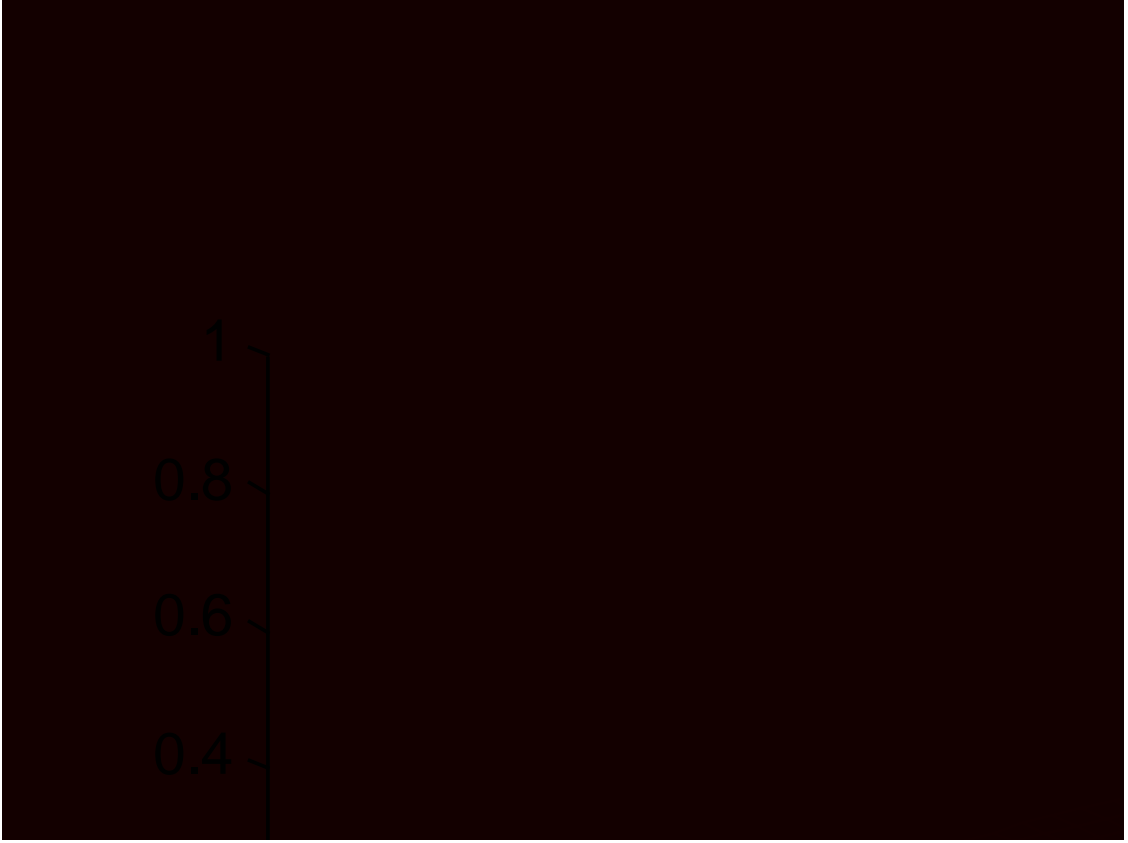
8.1 Gauss Darbesinin Yapının Merkezine Uygulanması

TM modu için gerekli eşitlikler elde edildikten sonra Gauss darbesinin iki boyutta ilerleyişini görmek amacıyla problem uzayı x ve y yönünde Şekil 8.1'deki gibi 30×30 adet hücreye bölünmüştür. Hesaplanması gereken işlemler için bir C++ programı yazılarak H_x , H_y ve E_z alan bileşenleri iteratif olarak çözdürülmüş ve kaynak olarak Gauss darbesi seçilerek yapının merkezine uygulanmıştır. 10'ar zaman adımı aralıkla E_z alan bileşeni çizdirilerek Gauss darbesinin 2 boyutta ilerleyişi gözlenmiştir.

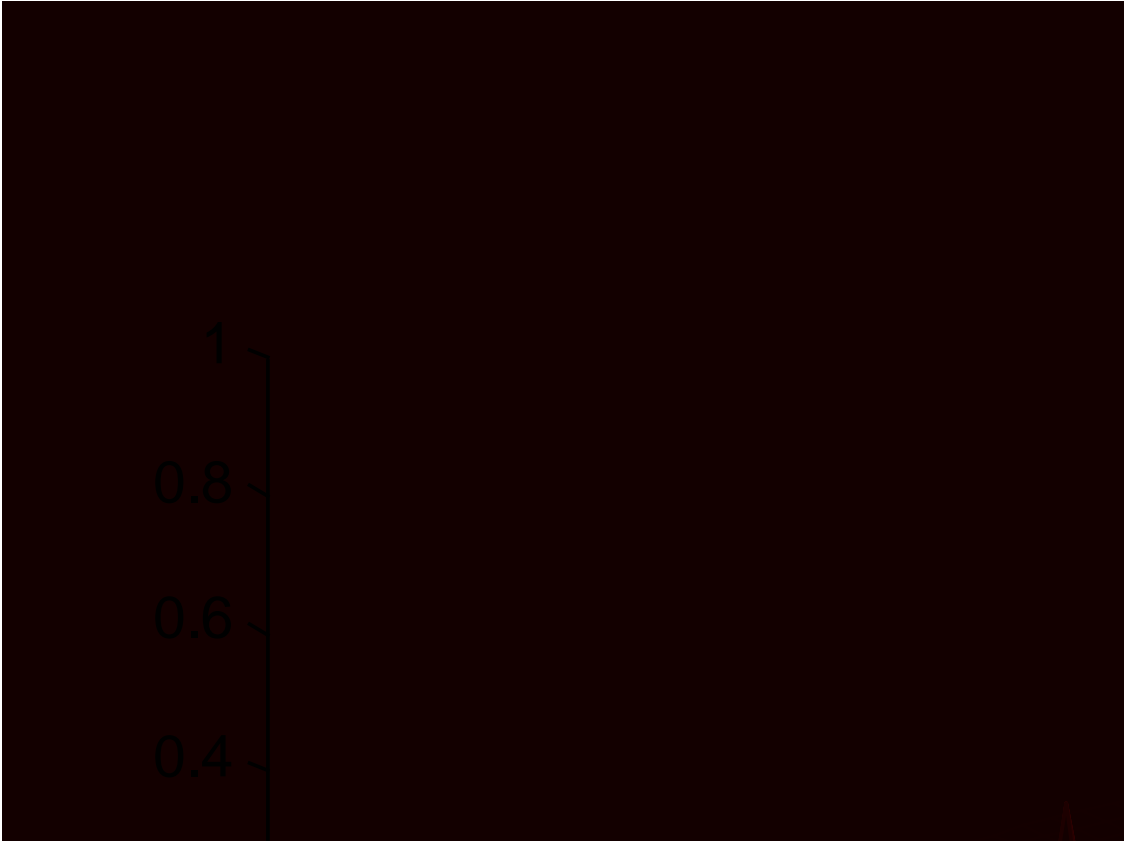
Burada sınır şartları kullanılmadığı için 100. zaman adımından sonra Gauss darbesinin problem uzayının içine geri yansıdığı görülmektedir.



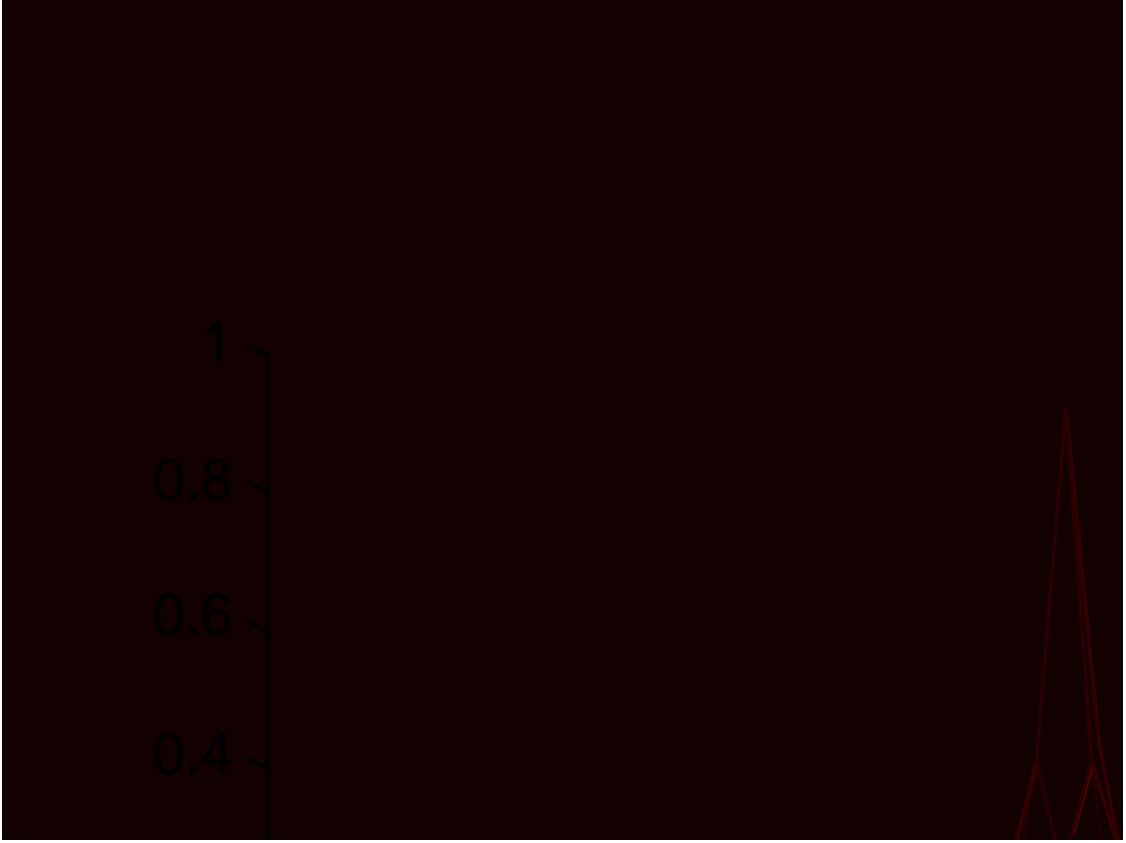
Şekil 8.1: İki Boyutlu Analiz İçin Hesap Uzayının Izgaralara Ayrılması



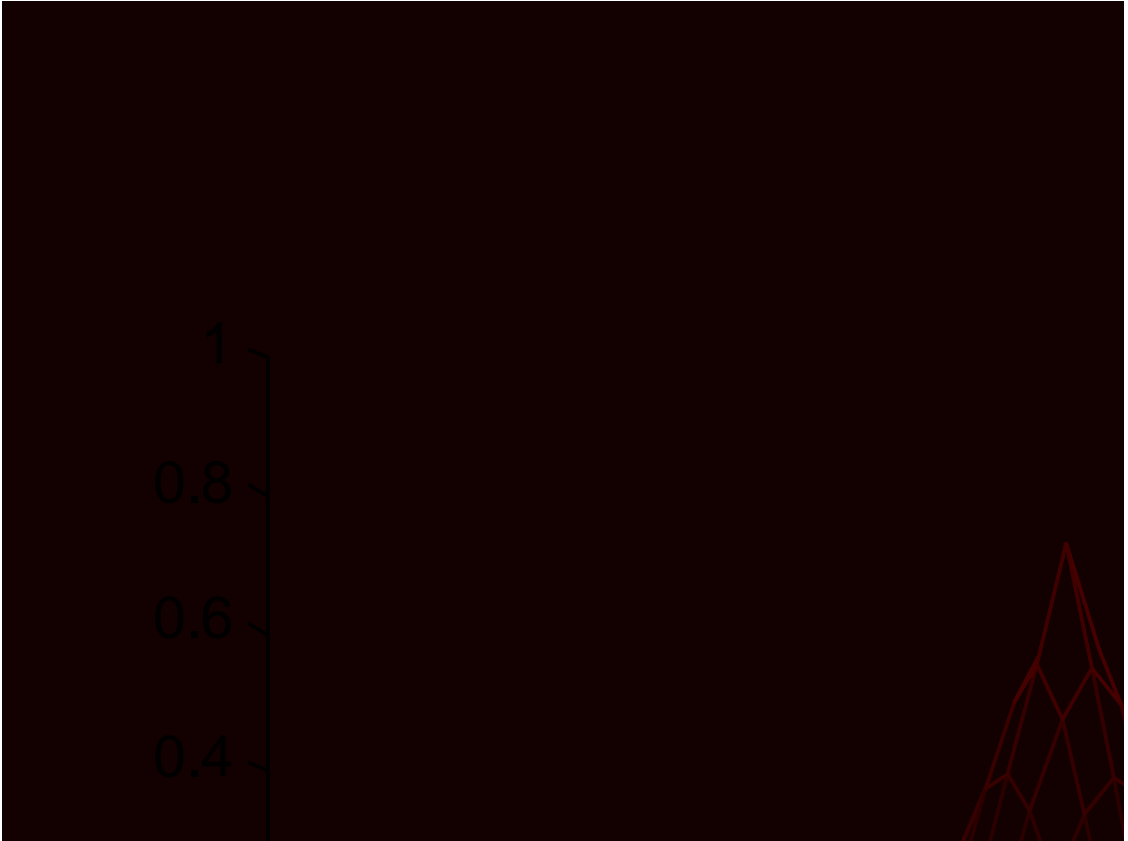
Şekil 8.2 : 10 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



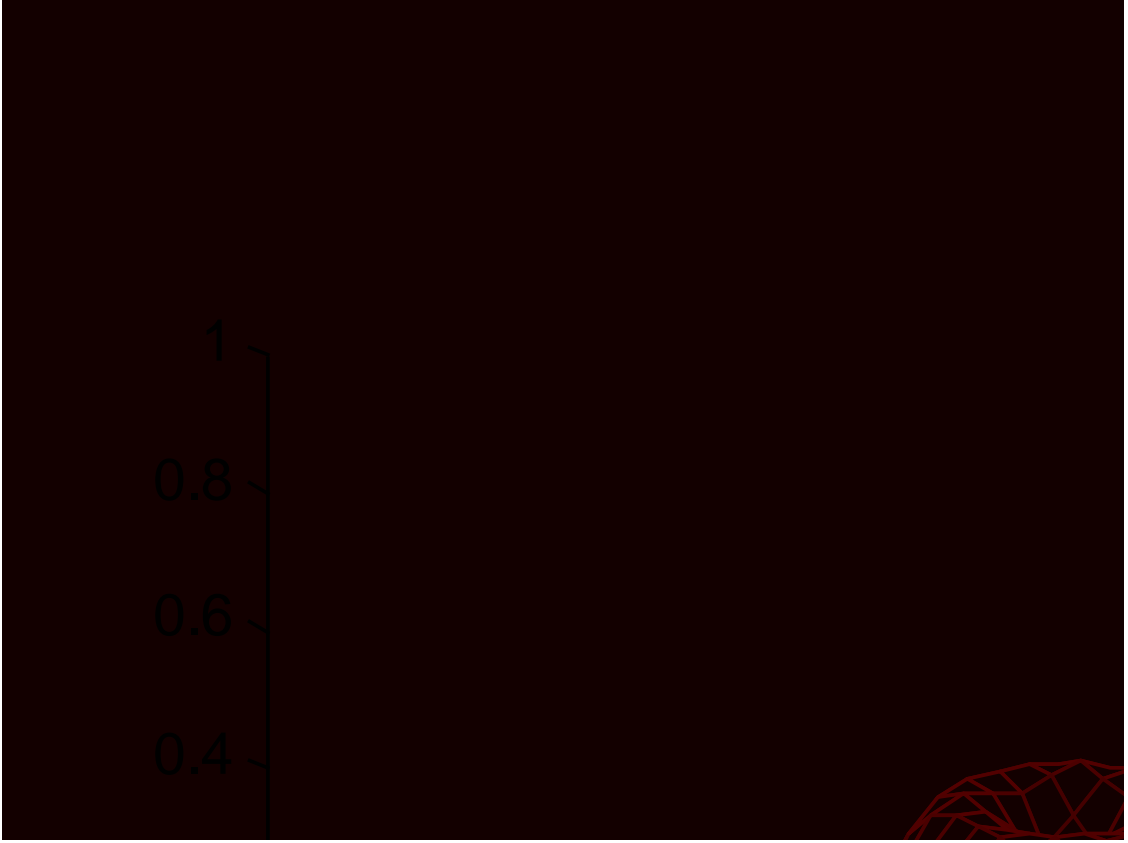
Şekil 8.3 : 20 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



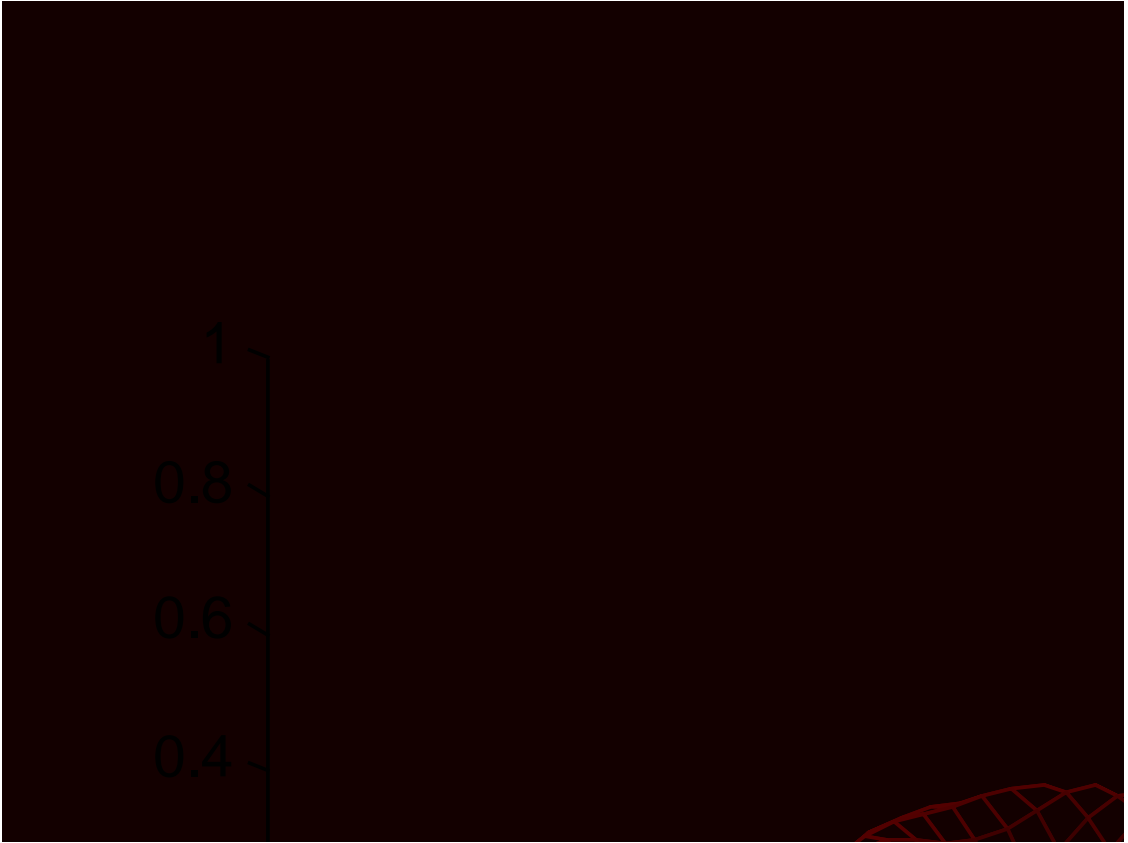
Şekil 8.4 : 30 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



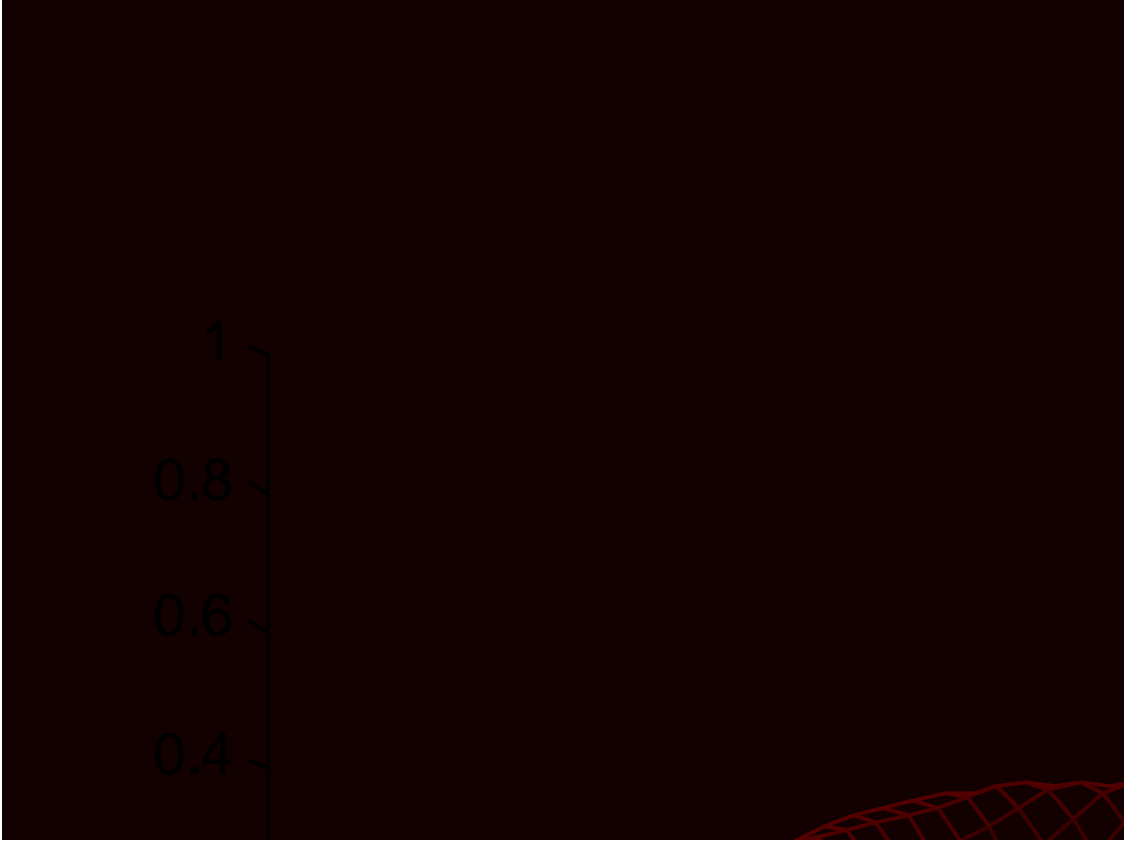
Şekil 8.5 : 40 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



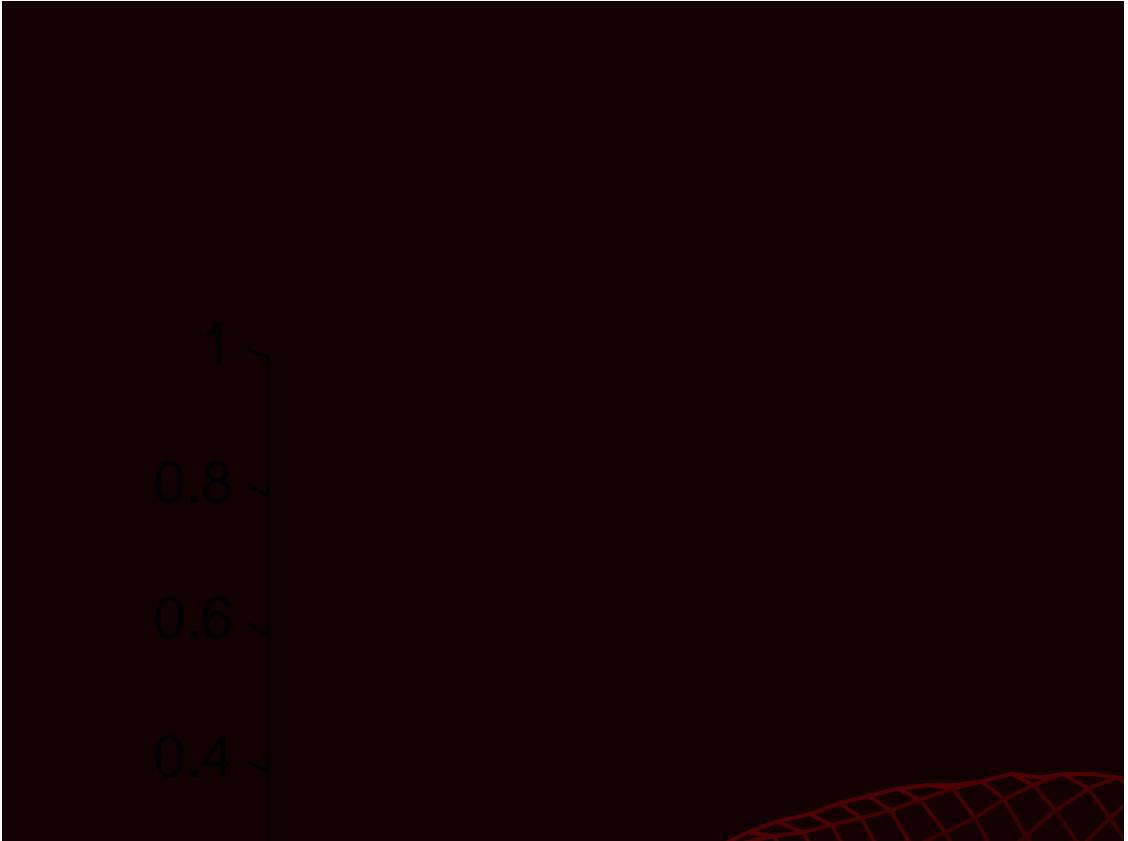
Şekil 8.6 : 50 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



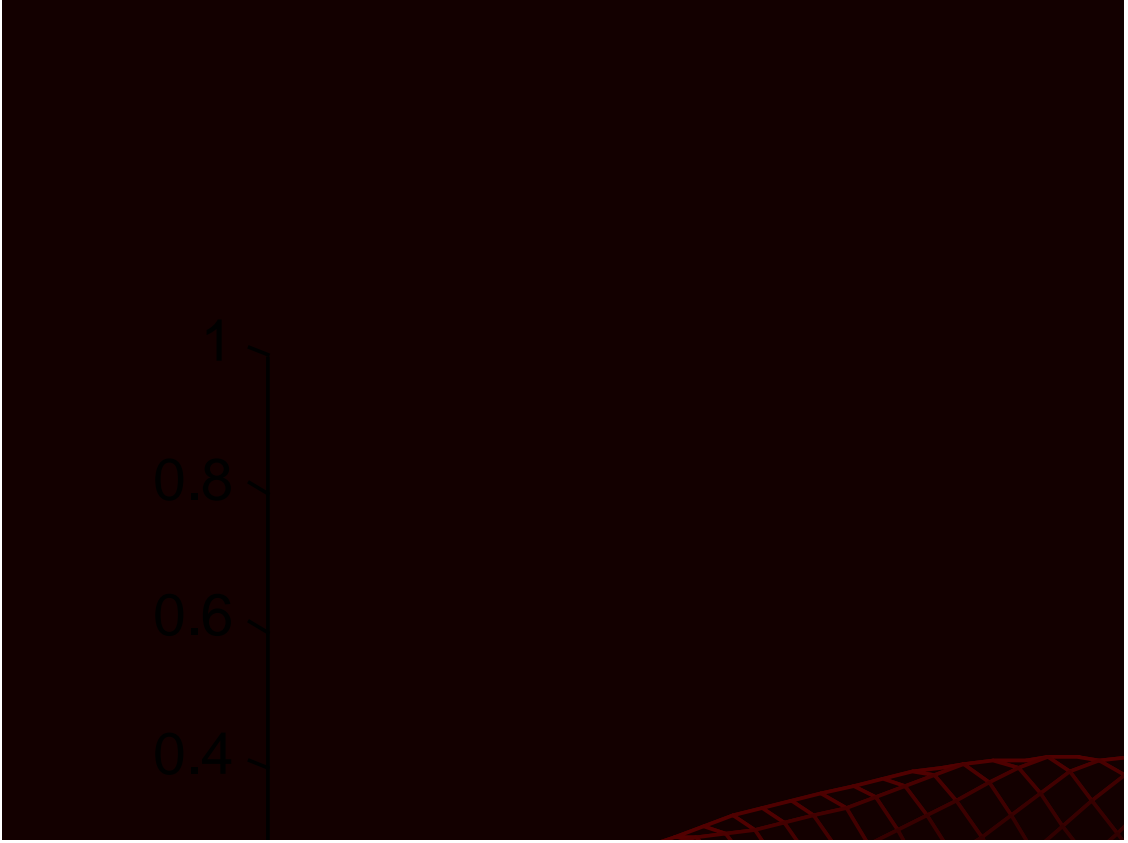
Şekil 8.7 : 60 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



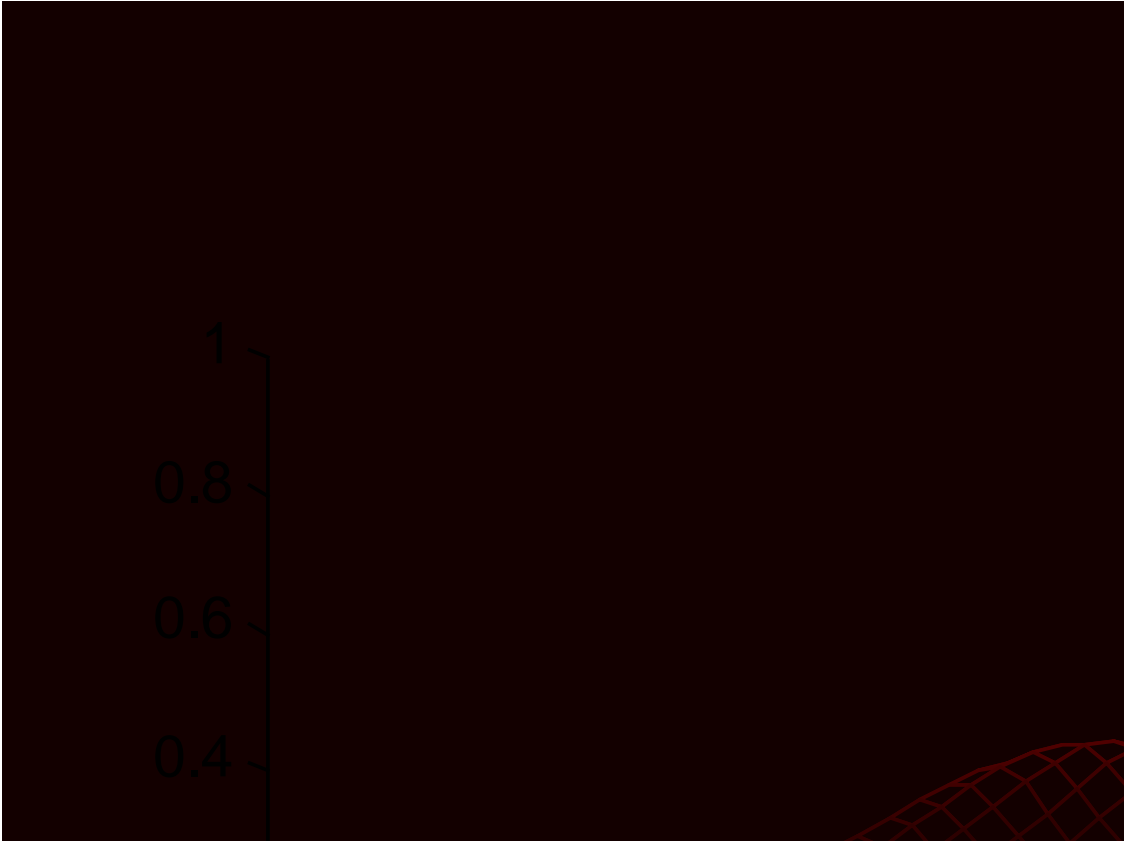
Şekil 8.8 : 70 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



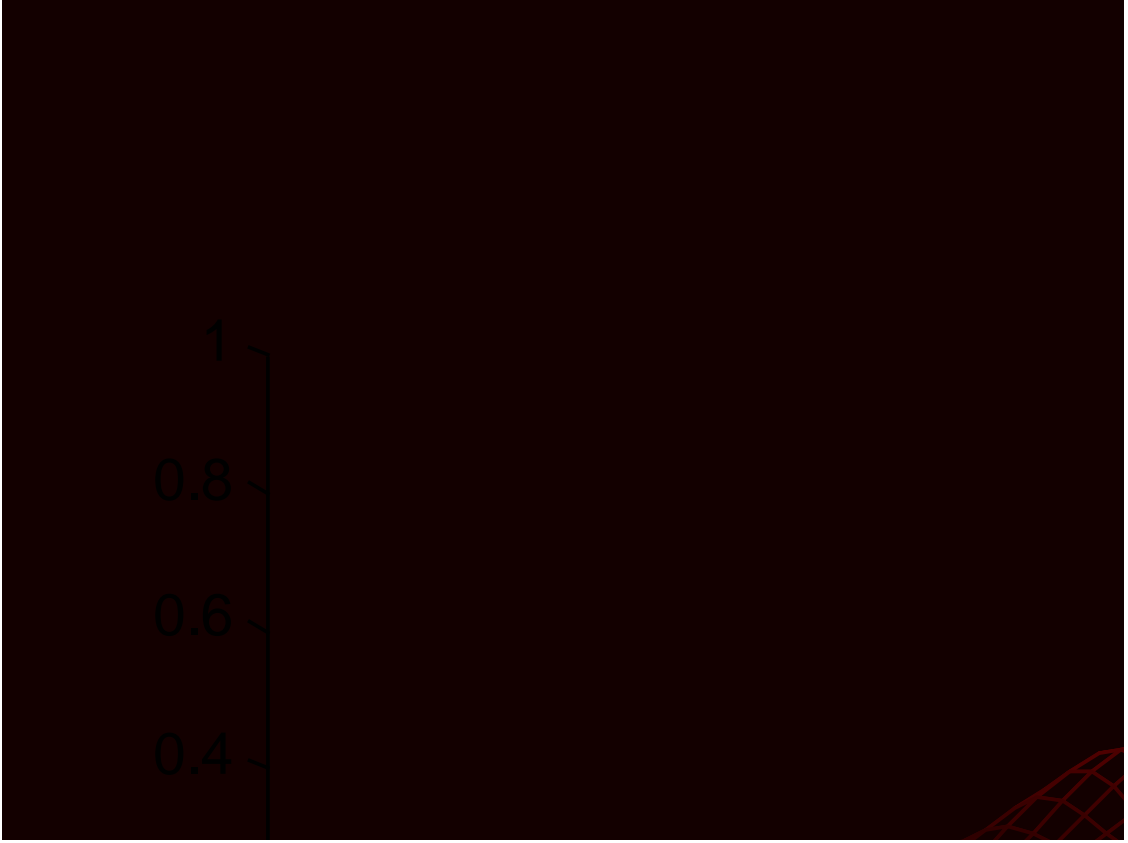
Şekil 8.9 : 80 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



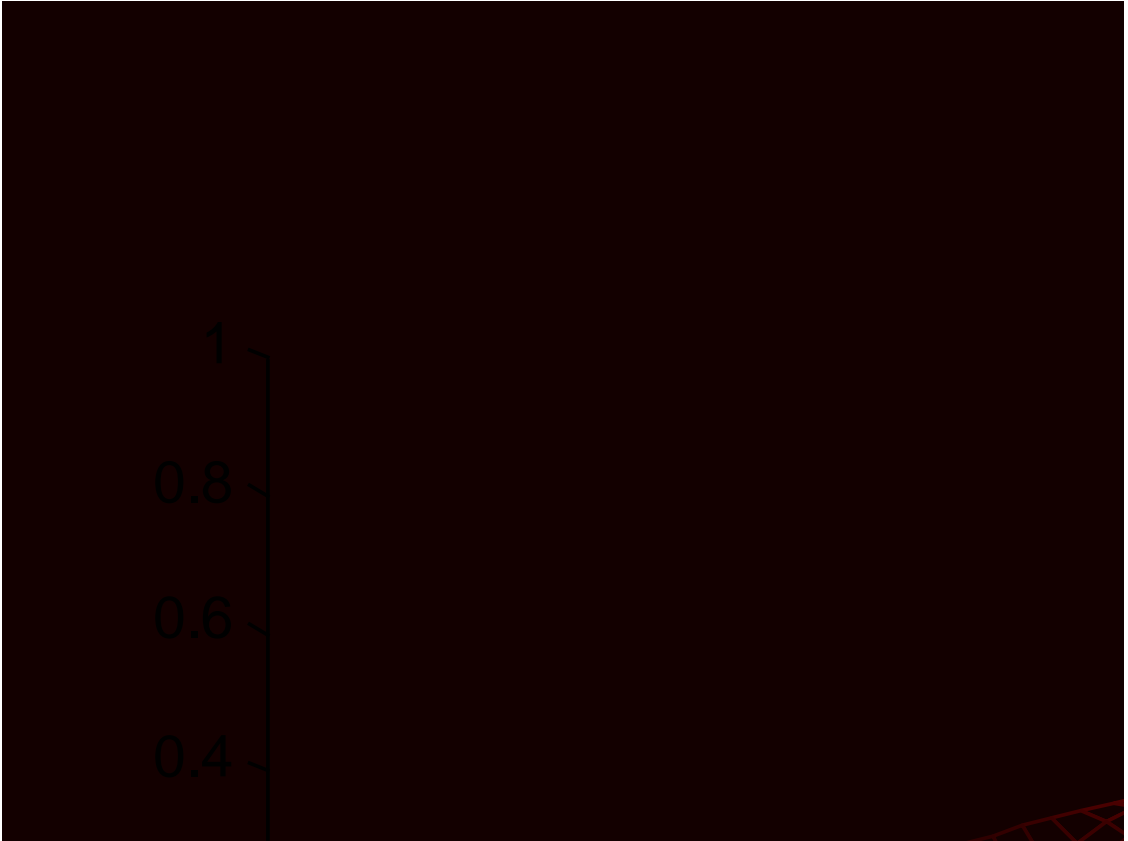
Şekil 8.10 : 90 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



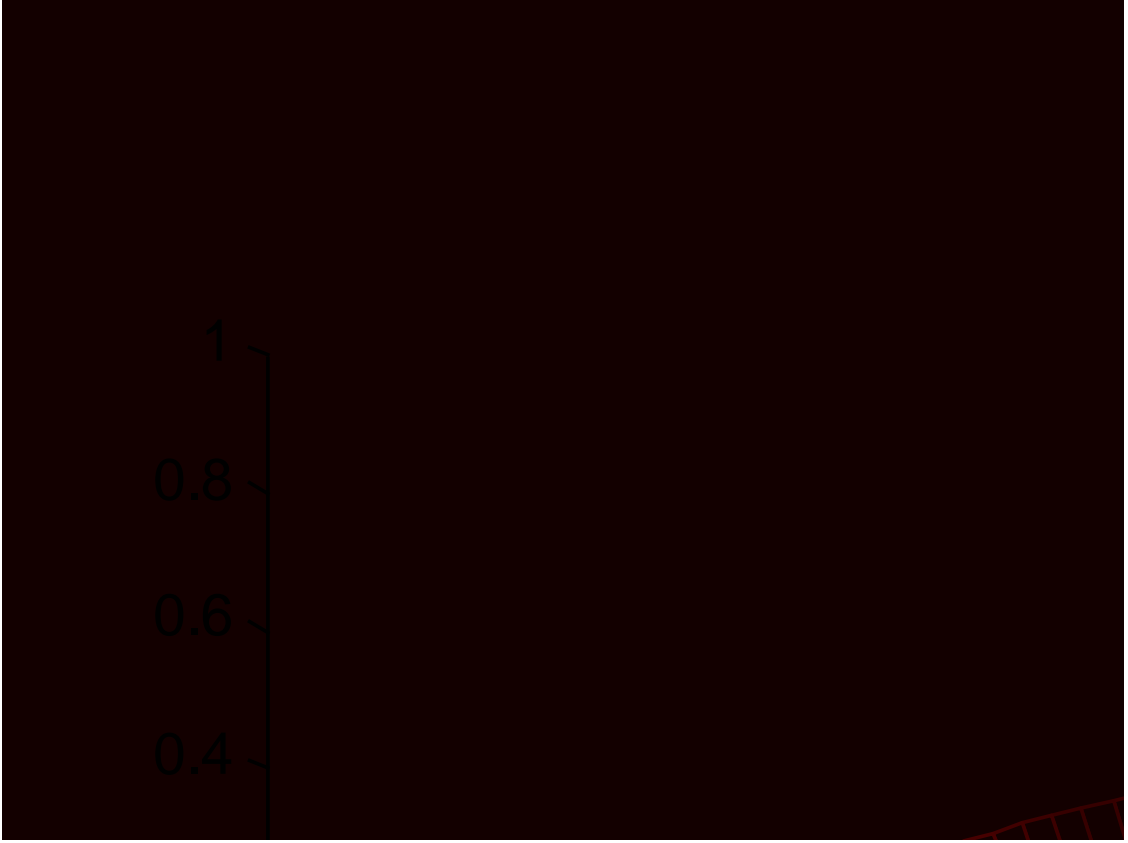
Şekil 8.11 : 100 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



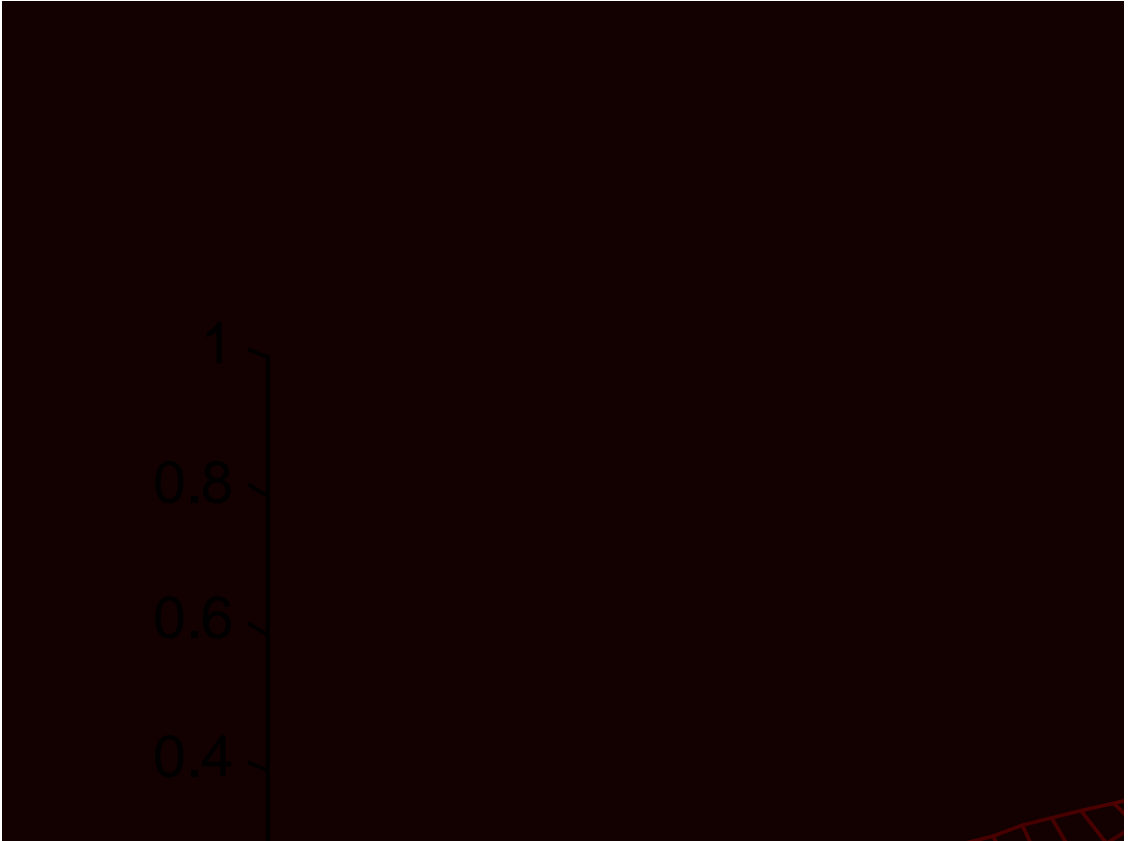
Şekil 8.12 : 110 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



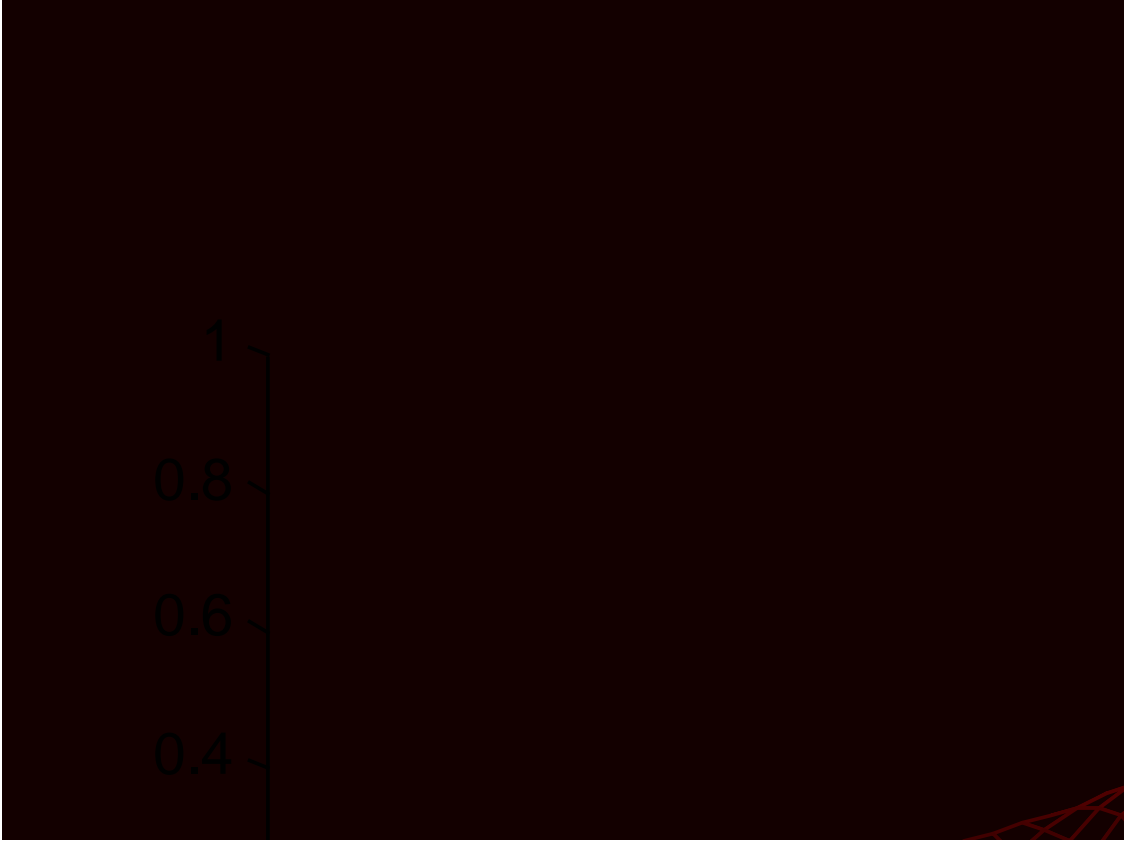
Şekil 8.13 : 120 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



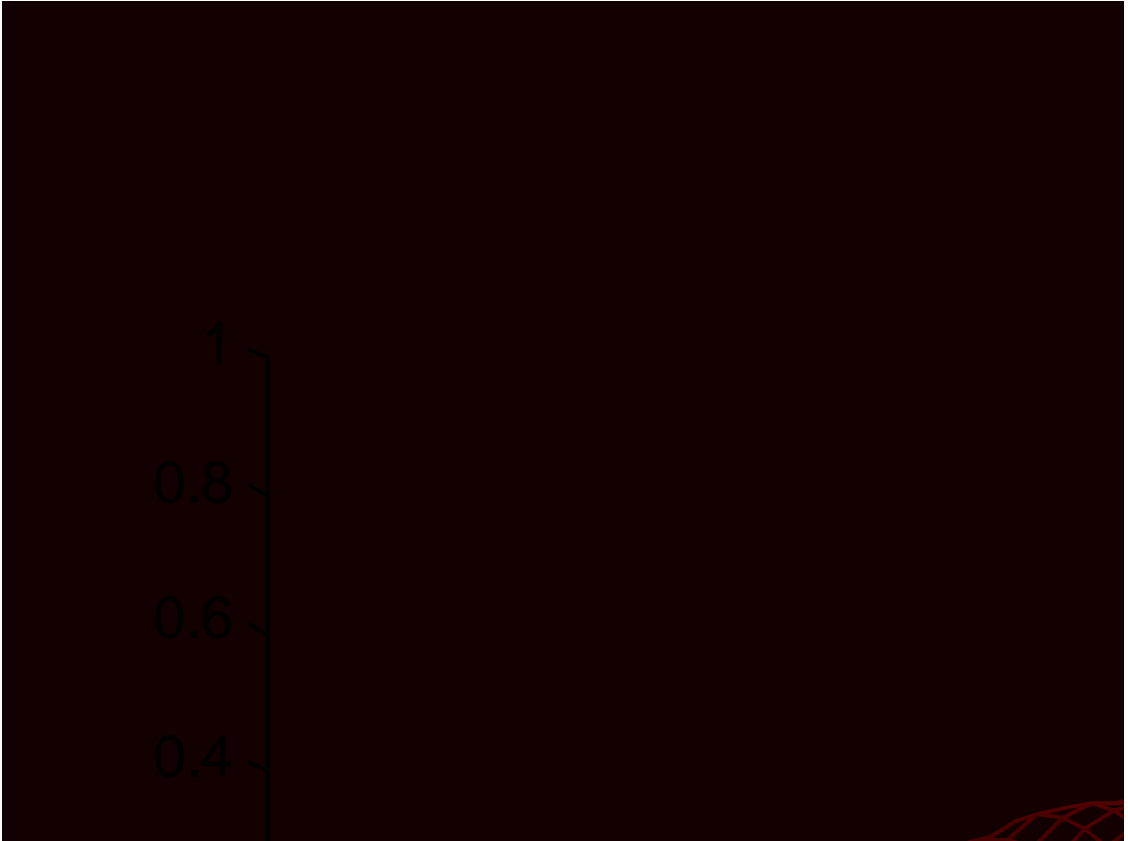
Şekil 8.14 : 130 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



Şekil 8.15 : 140 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



Şekil 8.16 : 150 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu

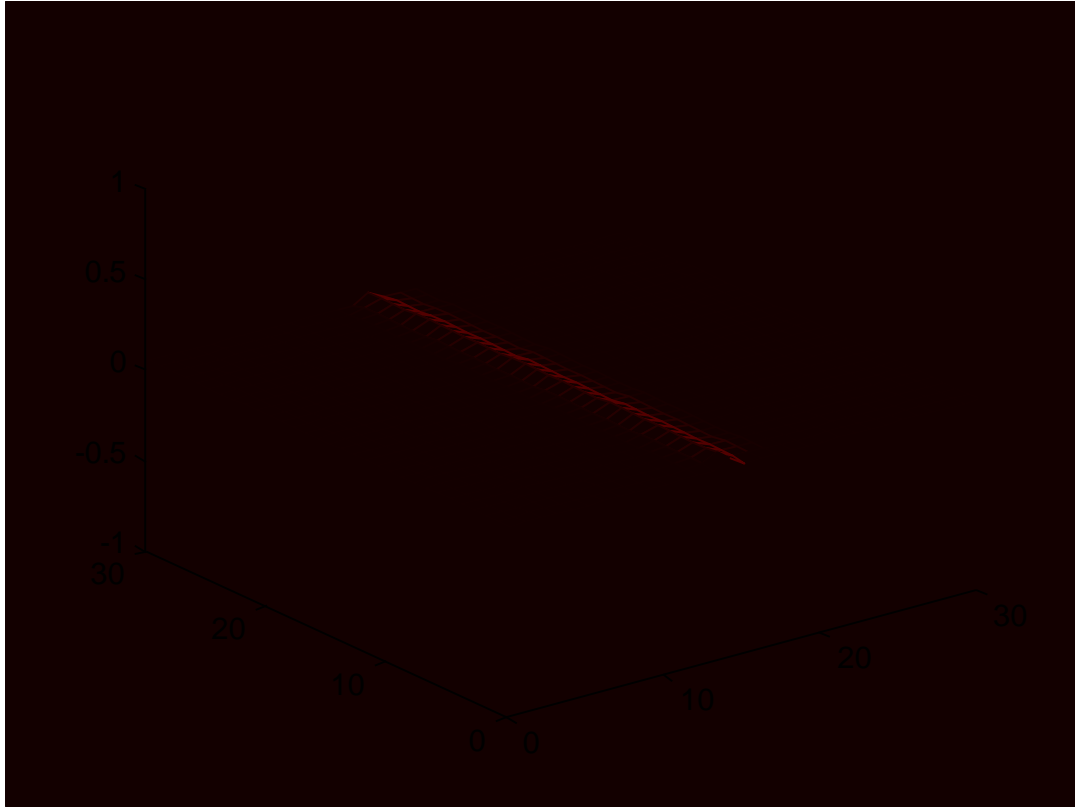


Şekil 8.17 : 160 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu

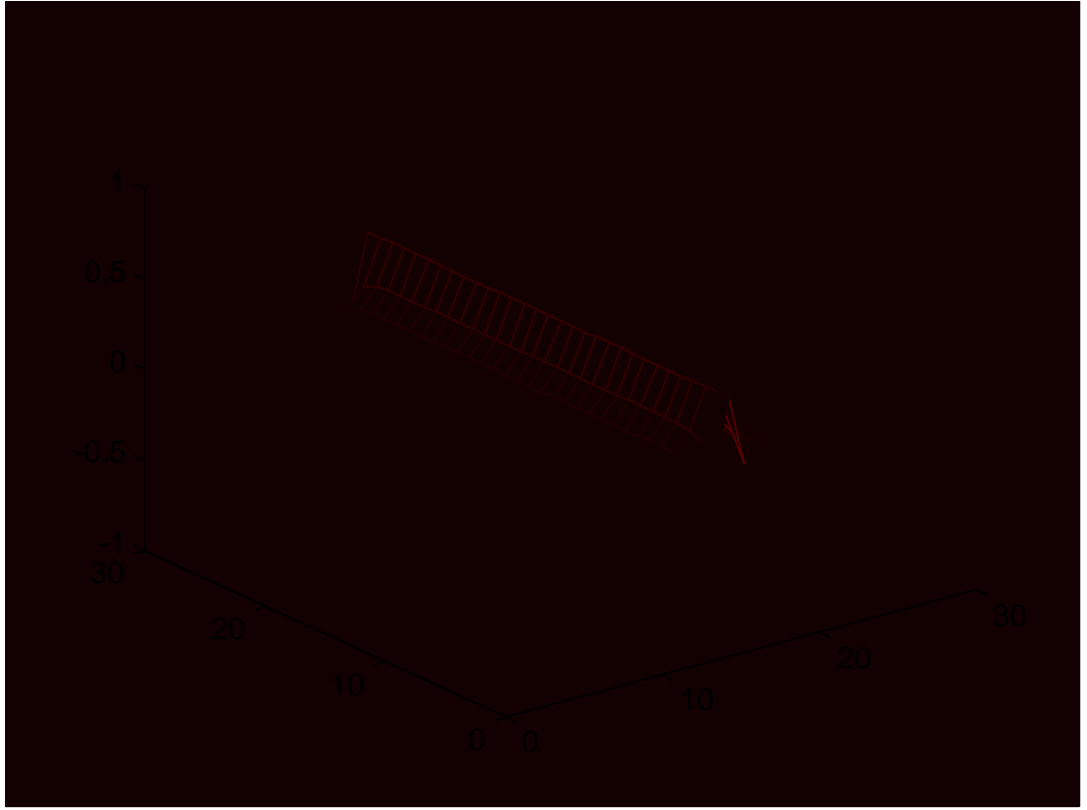
8.2 Gauss Darbesinin Bir Doğru Boyunca Uygulanması

İki boyutlu analiz için ızgaralara bölünen yapıda kaynak olarak yine Gauss darbesi kullanılmış ve pals, Şekil 8.18'deki gibi yapının merkezinden geçen y eksenini boyunca uygulanmıştır. Bu durumda palsin dairesel olarak her yöne doğru değil, x eksenini boyunca her iki yöne doğru ilerlediği gözlenmiştir. Kaynağın bu şekilde uygulaması için program içerisinde E_z alan bileşenin merkezden geçen y eksenini üzerindeki bütün bileşenlerini pals'ın değerine eşitlemek yeterlidir.

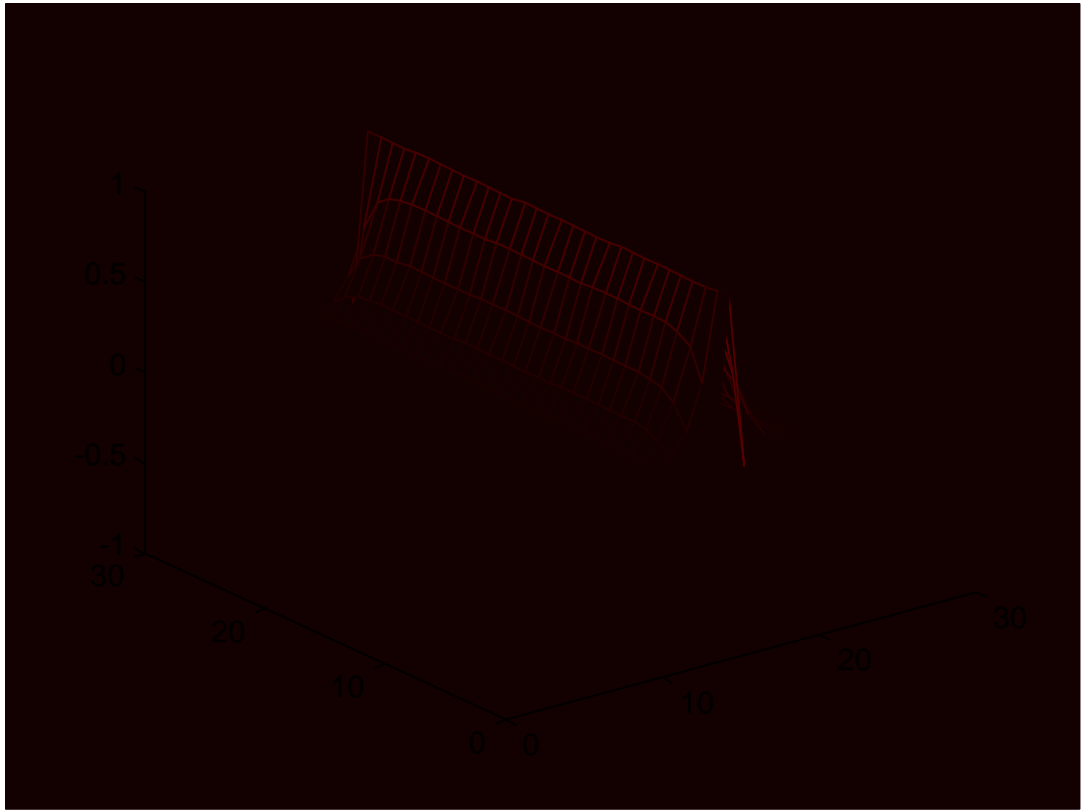
Sınır şartları kullanılmadığı için 100. Zaman adımından sonra Gauss darbesinin problem uzayının içine geri yansıdığı görülmektedir.



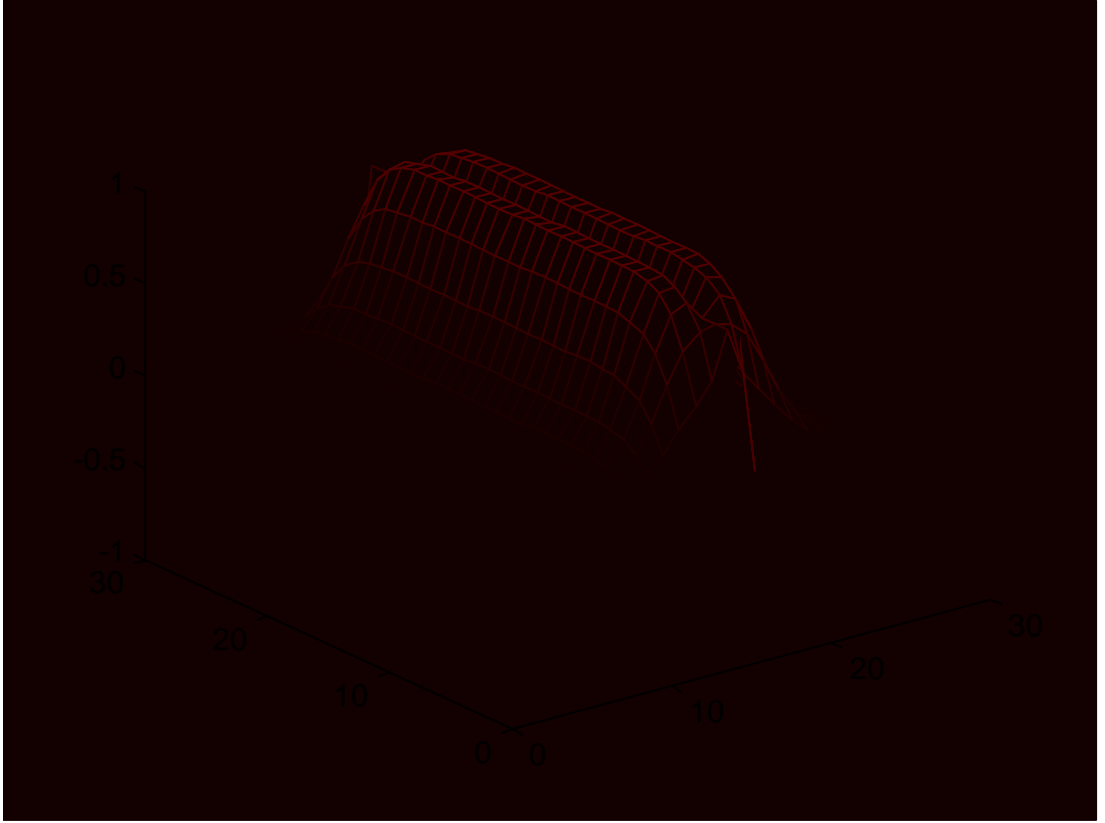
Şekil 8.18 : 10 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



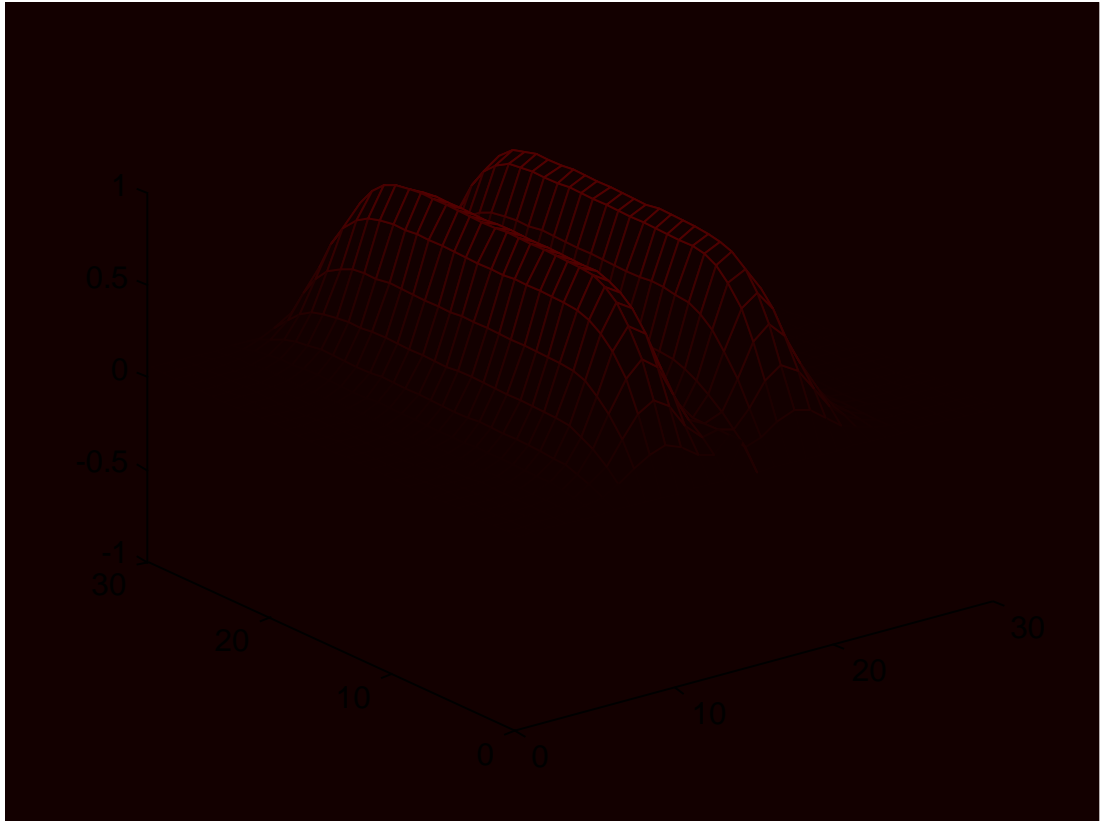
Şekil 8.19 : 20 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



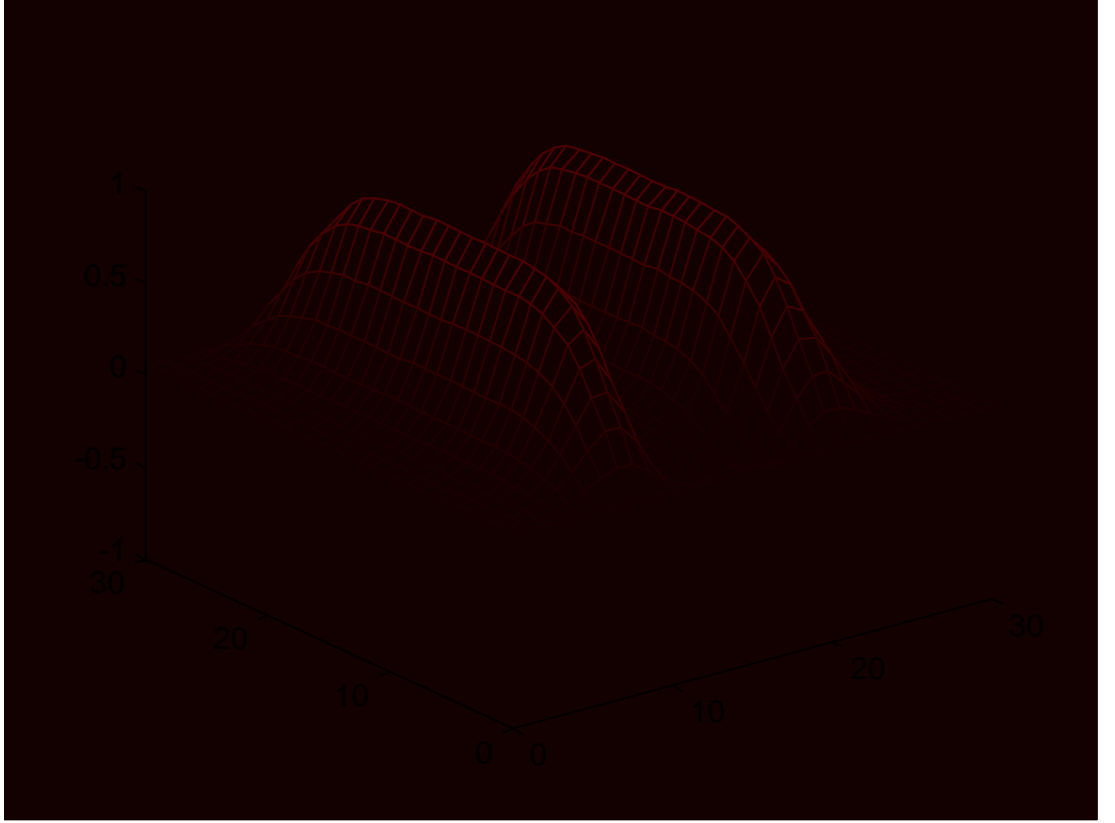
Şekil 8.20 : 30 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



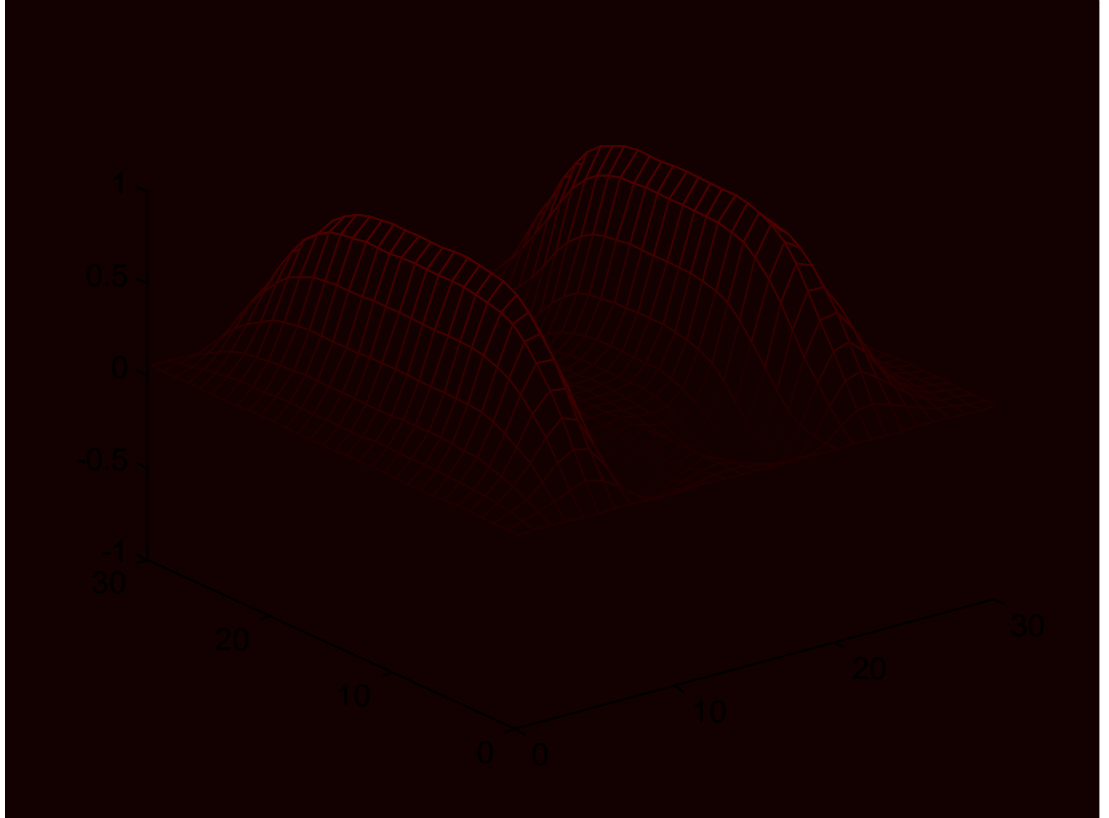
Şekil 8.21 : 40 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



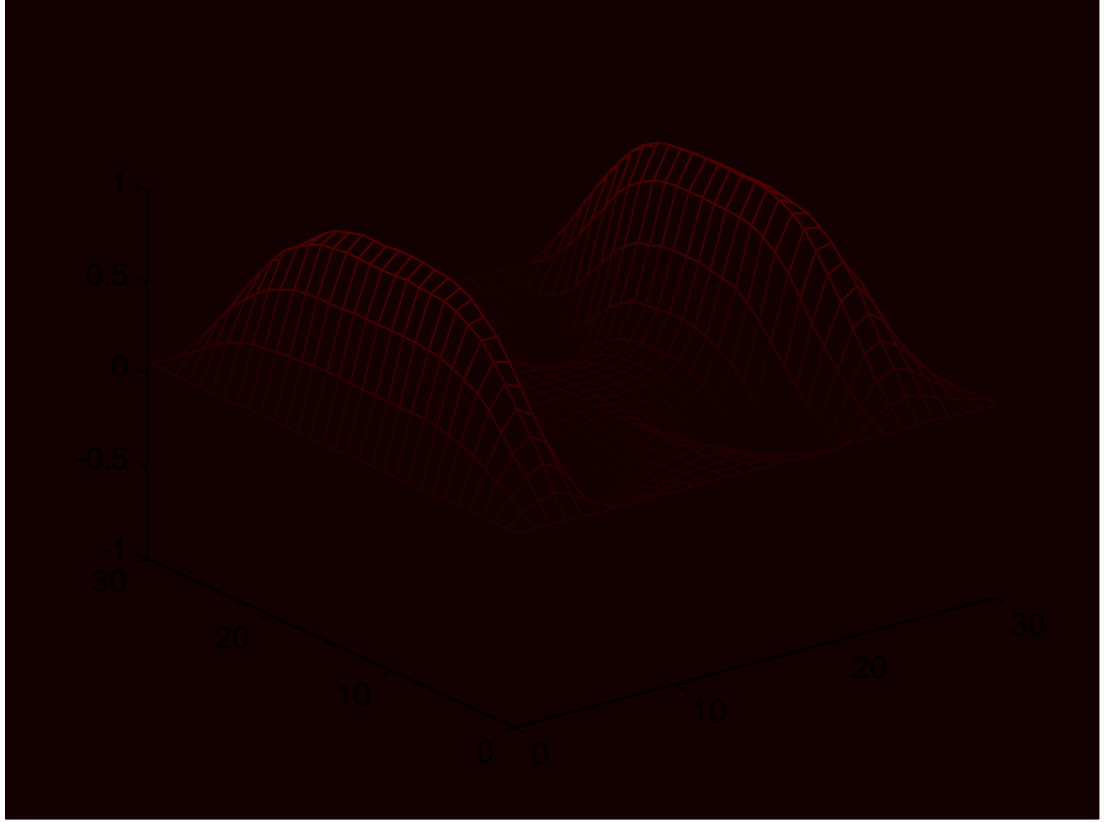
Şekil 8.22 : 50 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



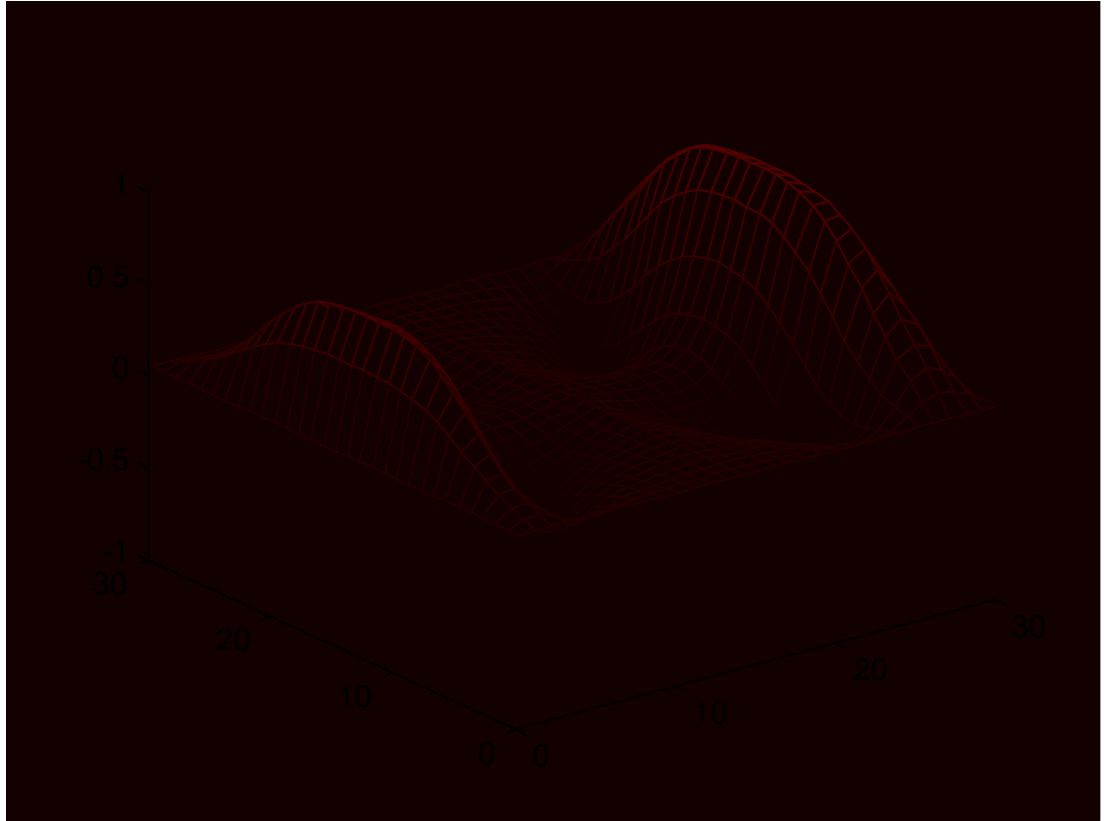
Şekil 8.23 : 60 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



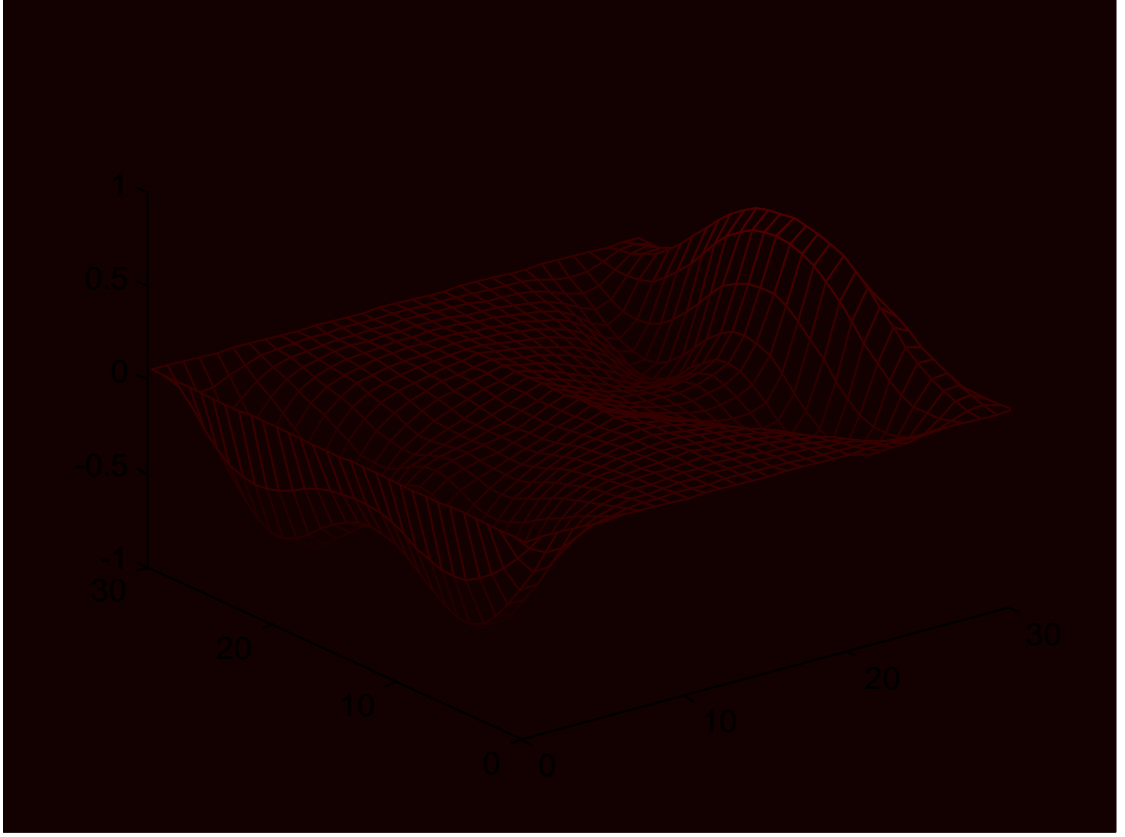
Şekil 8.24 : 70 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



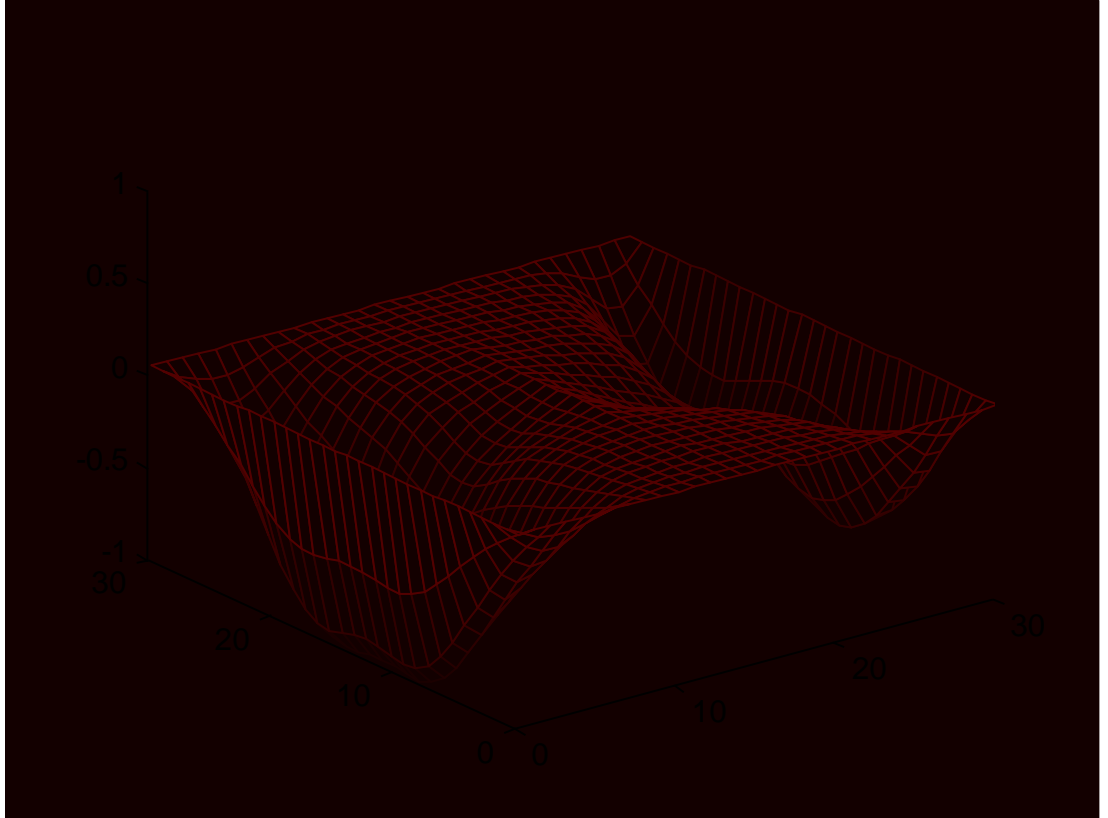
Şekil 8.25 : 80 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



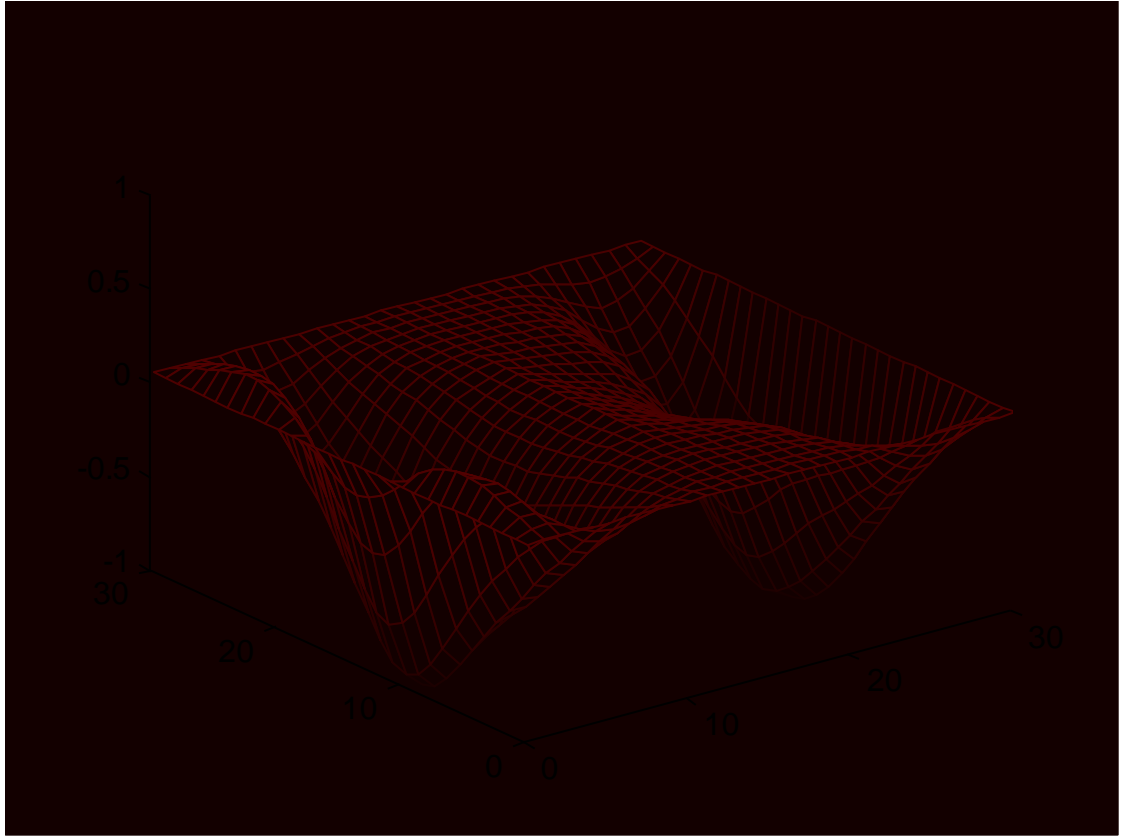
Şekil 8.26 : 90 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



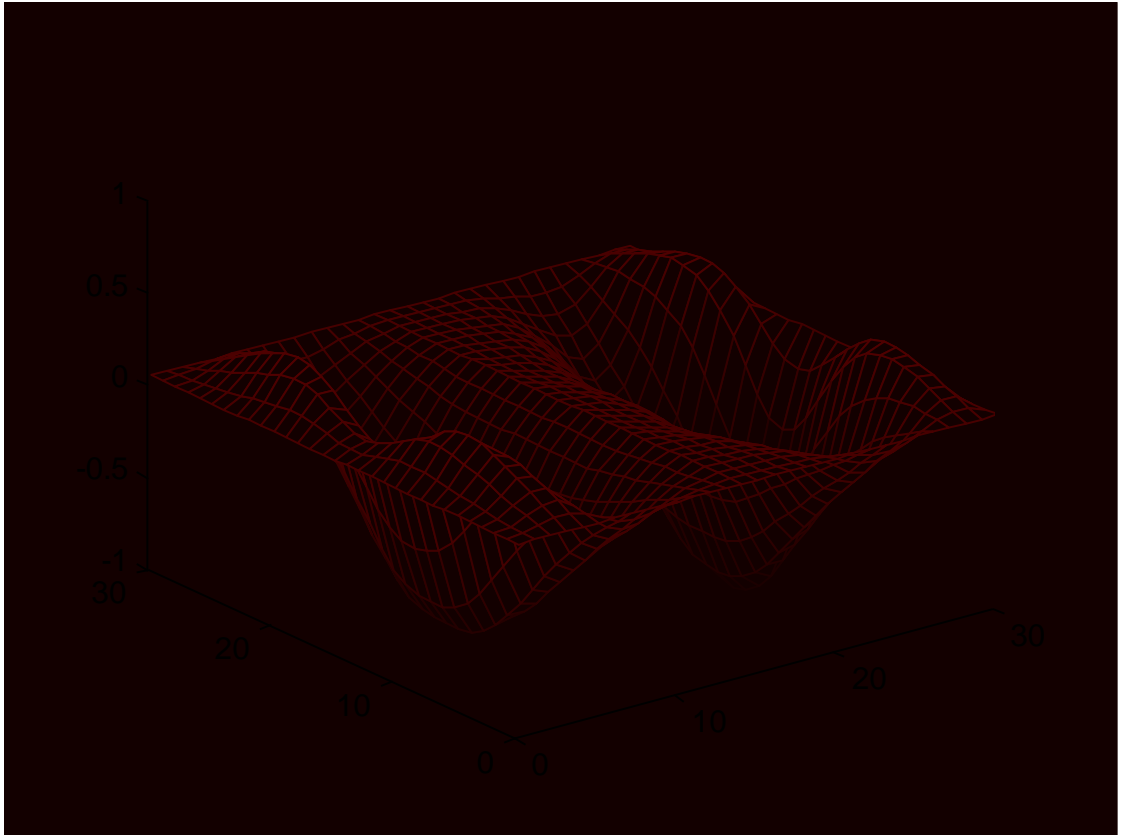
Şekil 8.27 : 100 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



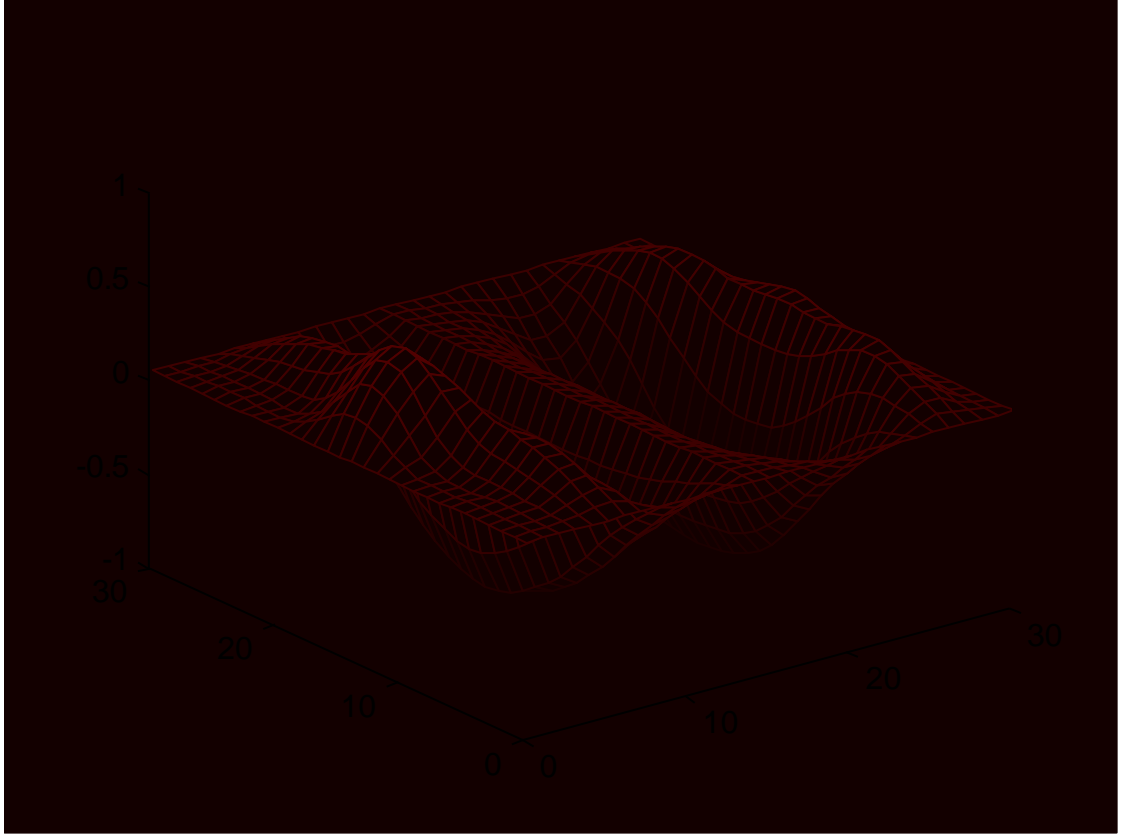
Şekil 8.28 : 110 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



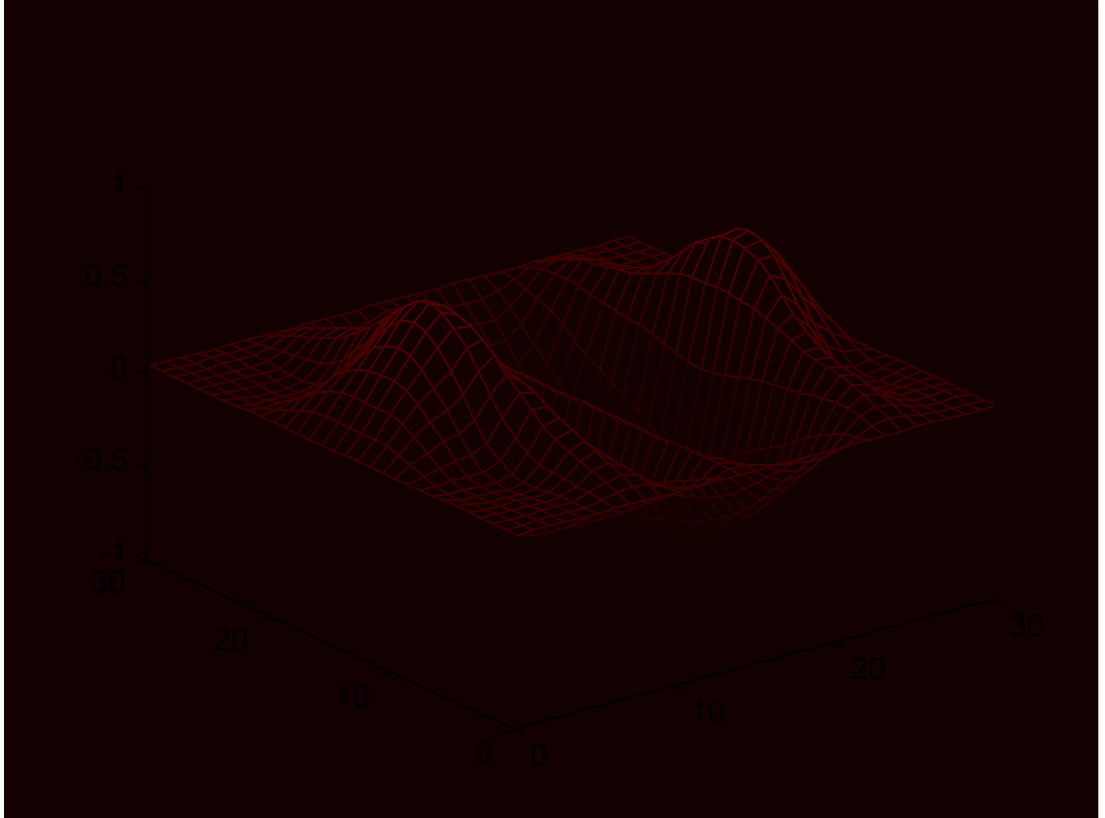
Şekil 8.29 : 120 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



Şekil 8.30 : 130 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



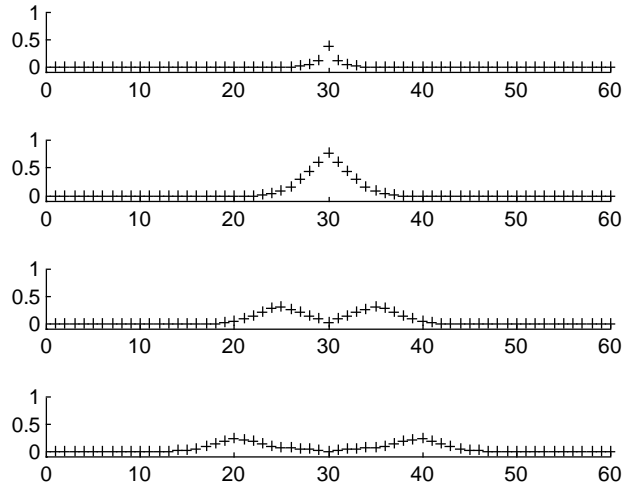
Şekil 8.31 : 140 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu



Şekil 8.32 : 150 Zaman Adımı Sonunda Gauss Darbesinin Durumu

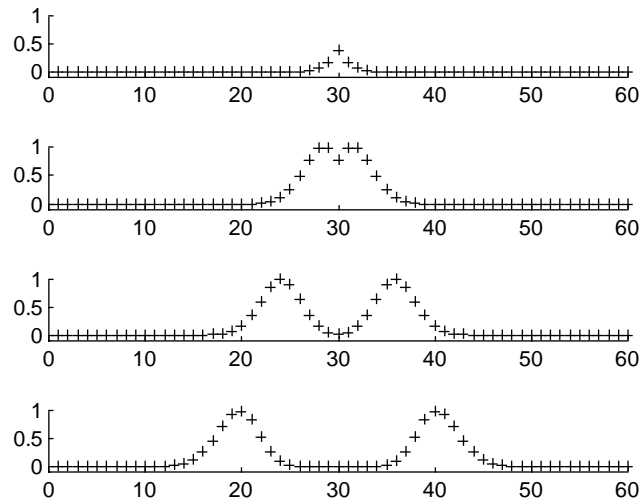
8.3 İki Boyutlu Analizde Gauss Darbesinin Genliğinin Değişimi

Bölüm 8.1'deki sonuçlardan görüldüğü gibi Gauss Darbesi yapının merkezine uygulandığında, pals hem x hem de y yönünde ilerlemektedir. Bu durumda pals ilerledikçe genliği azalmaktadır. Gauss darbesi merkeze uygulandığında yapıda herhangi bir kayıp parametresi olmasa bile ($\sigma = 0$ ve $\varepsilon_r = 1$) silindirik dağılım nedeniyle genlik değeri merkezden uzaklaştıkça azalır (Şekil 8.33).



Şekil 8.33 : Silindirik Dağılım Nedeniyle Palsın Genliğinin Zamanla Azalması

Eğer Gauss darbesi Bölüm 8.2'deki gibi bir doğru boyunca uygulanırsa palsın genliği zamana bağlı olarak değişmez. Bu durum Şekil 8.34'den de görülmektedir.



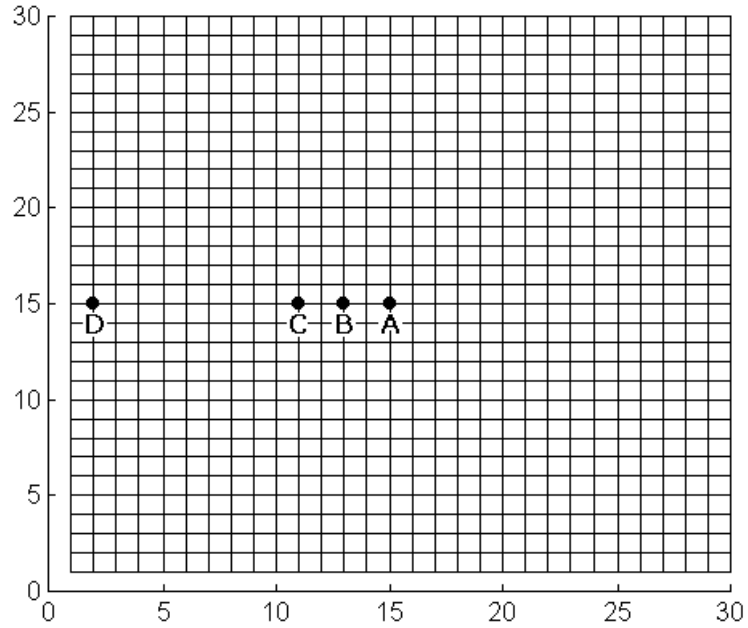
Şekil 8.34 : Doğru Boyunca Kaynak Uygulandığında Palsın Genliğinin Değişimi

8.4 İki Boyutlu FDTD Metodu İle Zaman Cevabının Elde Edilmesi

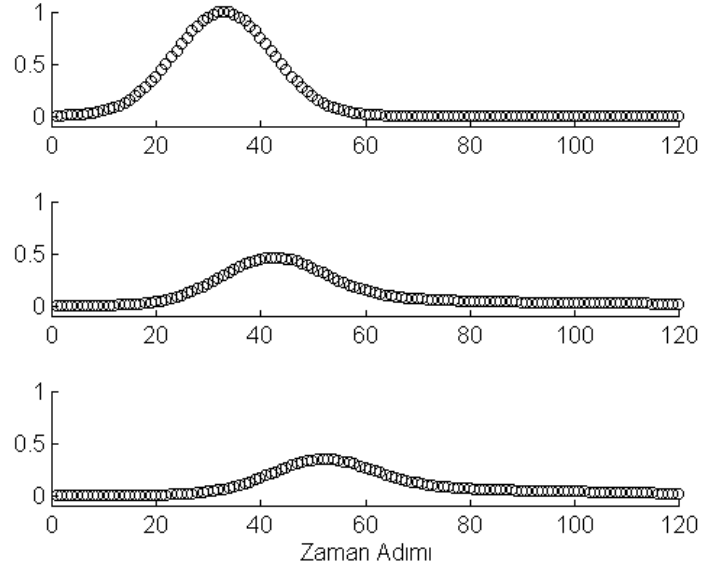
FDTD metodu ile 2 boyutlu yapıların analizi yapılırken Maxwell denklemleri doğrudan zaman domeninde ayrıştırılarak iteratif olarak çözdürüldüğü için sonuçta elde edilen bilgi zaman domeni cevabıdır. Bu cevabının elde edilmesi için yapılması gereken FDTD simülasyonu süresince problem uzayı içerisindeki belirli noktalardan gözlem yapmaktır. Simülasyon sonunda yapıya ait zaman cevabı doğrudan elde edilir. Zaman cevabının Fourier dönüşümü alınarak da yapının frekans cevabı elde edilebilir.

Bölüm 8.1 ve 8.2'deki sonuçlarda analiz edilen yapıda Gauss darbesinin ilerleyişi verilmiş ve 2 boyutta Gauss darbesinin zamana bağlı olarak nasıl değiştiği gözlenmiştir. Burada ise belirli bir gözlem noktasında her zaman adımı için değerler alınarak o noktadaki alan bileşeninin genliğinin zamana bağlı olarak nasıl değiştiği gösterilmektedir.

Şekil 8.35'deki gibi ızgaralara bölünmüş yapıda Gauss darbesi merkezi uygulanmış ve A,B,C noktalarındaki E_z alan bileşenlerinin genliği çizdirilmiştir. (Şekil 8.36)



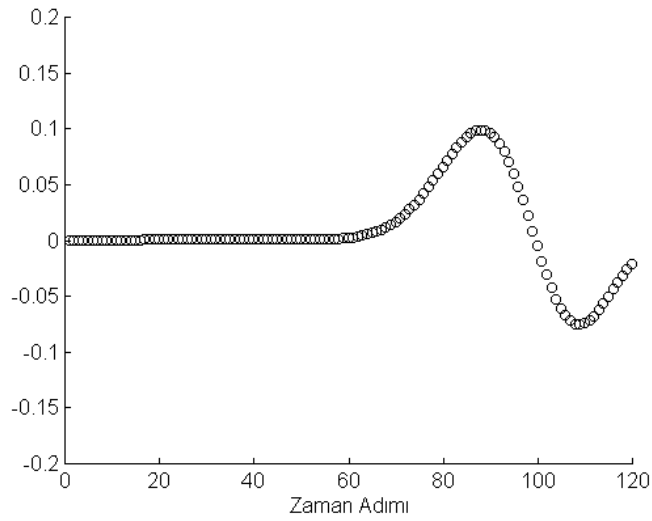
Şekil 8.35 : 2 Boyutlu Yapıda Gözlem Noktaları



Şekil 8.36 : A, B ve C Gözlem Noktalarındaki E_z Alan Bileşenlerinin Zamana Bağlı Değişimi

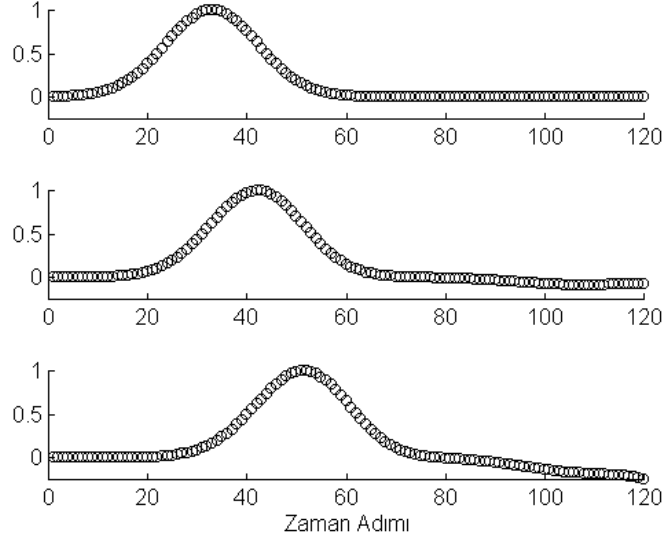
Şekil 8.36'dan görüldüğü gibi Gauss darbesi A'ya uygulandıktan sonra ilerlemekte ve C'ye ulaştığında genliği %50'den fazla azalmaktadır.

D gözlem noktasında E_z alan bileşeninin zamana bağlı değişimi ise Şekil 8.37'de gösterilmiştir. Sınır şartı kullanılmadığı için 100. zaman adımından sonra palsın problem uzayının içine geri döndüğü görülmektedir.



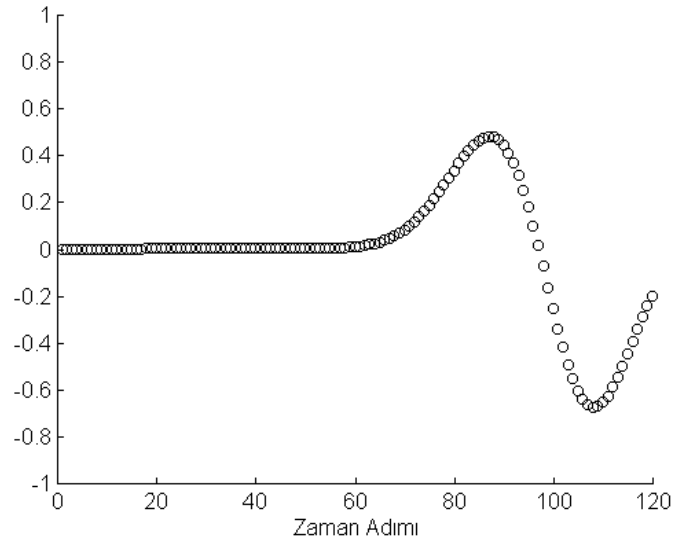
Şekil 8.37 : D Gözlem Noktasında E_z Alan Bileşeninin Zamana Bağlı Değişimi.

Bölüm 8.2'deki gibi Gauss darbesi bir doğru boyunca uygulanırsa A,B,C gözlem noktalarındaki E_z alan bileşeninin zamana bağlı değişimi Şekil 8.38'deki gibi olur. Şekilden görüldüğü gibi pals ilerledikçe genliği değişmez.



Şekil 8.38 : A, B ve C Gözlem Noktalarındaki E_z Alan Bileşenlerinin Zamana Bağlı Değişimi

D gözlem noktasında E_z alan bileşeninin zamana bağlı değişimi ise Şekil 8.39'da gösterilmiştir. Sınır şartı kullanılmadığı için 100. zaman adımından sonra palsın problem uzayının içine geri döndüğü görülmektedir.

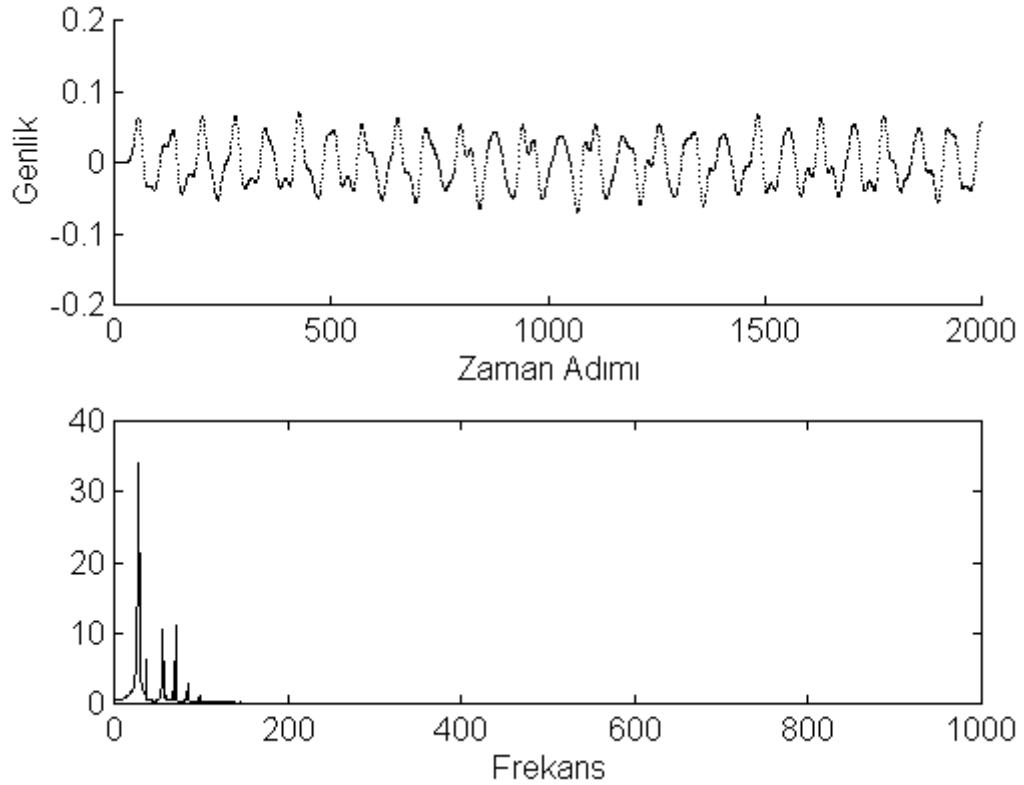


Şekil 8.39 : D Gözlem Noktasındaki E_z Alan Bileşeninin Zamana Bağlı Değişimi

8.5 İki Boyutlu FDTD Metodu İle Frekans Cevabının Elde Edilmesi

Kenarları mükemmel iletken kaplı 2 boyutlu bir yapının frekans davranışını elde etmek için öncelikle yapının içindeki bir noktaya kaynak olarak Gauss darbesi uygulanır. Gauss darbesinin süresi analiz yapılacak en yüksek frekansa göre belirlenir. FDTD simülasyonu boyunca yapı içerisindeki bir gözlem noktasından E_z alan bileşeninin değerleri kaydedilir. Gözlenen alan bileşeninin, yapının her kenarından birkaç yansıma gelinceye kadar kaydedilmesi yeterlidir. Çünkü bu şekilde zaman cevabı, yapıya ait bilgileri kaydetmiş olacaktır (Sevgi,1999). Simülasyon sonunda kaydedilen alan bileşenine ait değerlerin Fourier dönüşümü alınarak yapının rezonans frekansları elde edilir.

Şekil 8.40'da $\Delta x = \Delta y = 1\text{cm}$ olan ve 30×30 hücreye bölünen bir yapıya ait zaman ve frekans cevabı görülmektedir.



Şekil 8.40 : İki Boyutlu Yapıda Zaman ve Frekans Cevabı