

EMÜ241 ELEKTROMANYETİK I.

Yrd. Doç. Dr. Hasan H. Balık

<http://balik.firat.edu.tr>

Hasan.H@balik.firat.edu.tr

EMÜ241 ELEKTROMANYETİK I.

Yrd. Doç Dr. Hasan H. Balık



ANA SAYFA

[Özgeçmiş](#)[Yayınlar](#)[Dersler](#)[Bitirme DERSLER](#)[Seminer](#)[Tezler](#)[Deney Föyleri](#)[Staj Raporları](#)[Kişisel](#)[İletişim](#)

- Güz Dönemi
- Bahar Dönemi



Hasan H. BALIK'ın Sayfasına Hoş Geldiniz

Sayfalar Güncellenmektedir.

EMÜ241 ELEKTROMANYETİK I.

Yrd. Doç Dr. Hasan H. Balık

Hasan H. BALIK HomePage - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Back Forward Stop Home Search Favorites Media Print Mail News RSS Feeds

Address http://balik.firat.edu.tr/index.htm



ANA SAYFA

Özgeçmiş

Yayınlar

Dersler

Bitirme Ödevleri

Seminerler

Tezler

Deney Föyleri

Staj Raporları

Kişisel

İletişim

2. Coulomb ve Gauss yasaları, kuvvet ve elektrik alan kavramları
3. Poisson ve Laplace denklemleri, yükün korunumu kanunu, iletkenlik
4. Sayısal örnek ve uygulamalar
5. Elektriksel çok uçlular, Multipol kavramının açılımını kullanarak yük dağılımının dışındaki elektrik alanının hesabı, Legendre
6. Yük ve potansiyel terimi cinsinden bir yük dağılımının potansiyel enerji hesabı, Elektriksel yük dağılımının Elektrik alan cinsinden kapasite (kondansatör) hesabı
7. İletkenler üzerindeki elektriksel kuvvet, Görsel çalışma metodu ile Elektriksel kuvvetlerin hesabı
8. Sayısal örnek ve uygulamalar
9. Bağlı yükler ve elektrik akı yoğunluğu, polarizasyon, yalıtkanın varlığında Poisson ve Laplace denklemleri, Elektriksel duyu
10. Gerçek yayıtkanlar, ara yüzeydeki süreklilik şartları ve depolanan enerji
11. Elektrostatik alanlar için teklik teoremi ve görüntü alma yöntemi
12. Sayısal örnek ve uygulamalar

2002-2003 Öğretim Yılı Sınav Soruları;

- Arasınay
- Telafi
- Final
- Bütünleme

2002-2003 Öğretim Yılı Sınav Sonuçları

2001-2002 Öğretim Yılı Sınav Soruları;

- Arasınay
- Telafi
- Final
- Bütünleme

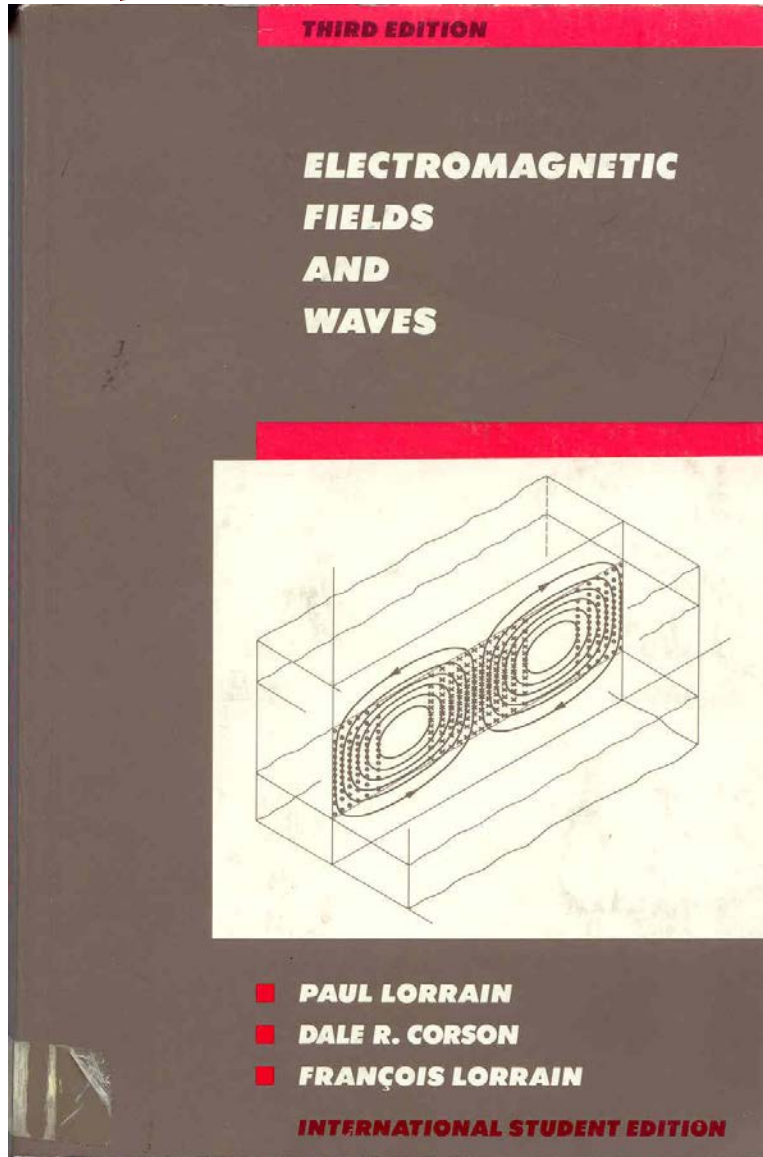
2001-2002 Öğretim Yılı Sınav Sonuçları

2000-2001 Öğretim Yılı Sınav Soruları;

- Arasınay
- Telafi

Yararlanılacak Kaynaklar

1. Electromagnetic Fields and Waves (Paul Lorrain *etc.*, W.H. Freeman Company, ISBN :0-716-71869-3)
2. Electromagnetism (I. S. Grant *etc.*, John Willey, ISBN : 0-471-92712-0)
3. Electromagnetsim for Engineers (P. Hammond, Pergamon Press, ISBN : 0-08-022104-1)
4. Electromagnetic Fields (R. V. Buckley, Macmillian Press, ISBN : 0-333-30664-3)
5. The Priciples of Electromagnetic Theory (Attay Kovetz, Cambridge University Press, ISBN : 0-521-39997-1)
6. Alanlar Kurami I : Dural Elektrik Alanlar Ders Notlari (Kemal Erdogan, Karadeniz Teknik Universitesi)
7. Elektromagnetik Problemler ve Sayisal Yontemler (Levent Sevgi, Birsen Yayınevi, ISBN : 975-511-223-5)
8. Elektromagnetik Alan Teorisi (Prof. Dr. H. Ergun Bayrakci, Birsen Yayınevi, ISBN : 975-511-011-9)



Cover image: Lines of E and of H in an optical waveguide. See page 668.
Back cover image: Differentiating circuit. See page 144.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Lorrain, Paul.

Electromagnetic fields and waves.

Includes index.

1. Electromagnetic fields. 2. Electromagnetic waves.

I. Corson, Dale R. II. Lorrain, François

III. Title

QC665.E4L67 1987 530.1'41 86-31803

ISBN 0-716-71823-5

ISBN 0-716-71869-3 (pbk.)

Copyright © 1988 by W. H. Freeman and Company

No part of this book may be reproduced by any mechanical, photographic, or electronic process, or in the form of a phonographic recording, nor may it be stored in a retrieval system, transmitted, or otherwise copied for public or private use without written permission from the publisher.

Printed in the United States of America

3 4 5 6 7 8 9 VB 9 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Haftalık Ders İçerikleri

1. Vektörler ve vektörel işlemleri, kordinat sistemleri
2. Coulumb ve Gauss yasaları, kuvvet ve elektrik alan kavramları
3. Poisson ve Laplace denklemleri, yükün korunumu kanunu, İletkenlik
4. Sayısal örnek ve uygulamalar
5. Elektriksel çok uçlular, Multipol kavramının açılımını kullanarak yük dağılımının dışındaki elektrik alanının hesabı, Legendre polinomları
6. Yük ve potansiyel terimi cinsinden bir yük dağılımının potansiyel enerji hesabı, Elektriksel yük dağılımının Elektrik alan cinsinden potansiyel enerjisi ve kapasite (kondansatör) hesabı

Haftalık Ders İçerikleri

7. İletkenler üzerindeki elektriksel kuvvet, Görsel çalışma metodu ile Elektriksel kuvvetlerin hesabı
8. Sayısal örnek ve uygulamalar
9. Bağlı yükler ve elektrik akı yoğunluğu, polarizasyon, yalıtkanın varlığında Poisson ve Laplace denklemleri, Elektriksel duyarlılık ve geçirgenlik kavramları
10. Gerçek yayıtkanlar, ara yüzeydeki süreklilik şartları ve depolanan enerji
11. Elektrostatik alanlar için teklik teoremi ve görüntü alma yöntemi
12. Sayısal örnek ve uygulamalar

1. VEKTÖRLER

- Giriş
- Vekrörel İşlemler ve İnvaryans
- Gradyant
- ∇ Operatörünün İnvaryansı
- Diverjans ve Diverjans Teoremi
- Rotasyonel ve Stokes Teoremi
- Laplas
- Koordinat Sistemleri
 - Yaygın Kullanılan Koordinat Sistemleri (Kartezyen, Silindirik ve Küresel)
 - Koordinat Sistemine göre Gradyant, Diverjans, Rotasyonel ve Laplas Hesaplamaları

1.1 GİRİŞ

Bu bölüm;

- Elektromanyetik Kuramı dersini yeni alan öğrencilere matematiksel bir temel oluşturmak
- Vektörel işlemleri ana hatları ile incelemek
- Koordinat sistemlerini ana hatları ile incelemek

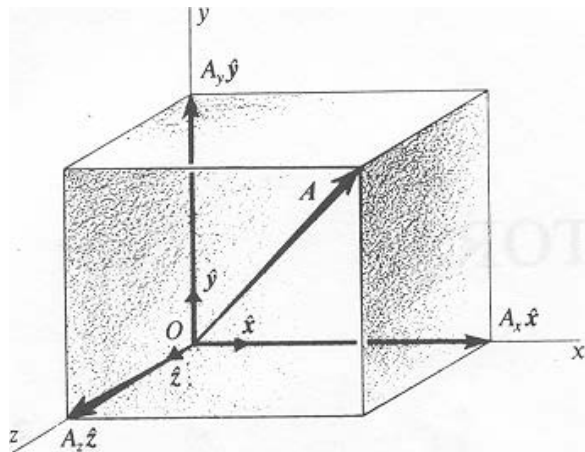
amacı ile hazırlanmıştır.

TANIM: Matematiksel olarak **ALAN** uzaydaki bütün noktalarda bir fiziksel büyüklüğü tanımlayan fonksiyondur. **Skaler Alan**`da her bir nokta için bu büyüklük bir sayı tarafından ifade edilir ve bir noktadan diğerine değişebilir (Sıcaklık, yoğunluk ve elektriksel potansiyel gibi). **Vektörel Alan**`da fiziksel büyüklük bir vektördür ve hem sayı hemde yön ile ifade edilir (Rüzgar ve yerçekimi kuvveti gibi).

NOT: Derste vektörler **KOU** skalerler ise *İTALİK* yazılacaktır.

TORNAVİDA KURALI: Pozitif z yönü pozitif x yönünü pozitif y yönüne kapattığımızda tornavidanın ilerleme yönüdür.

1.2 VEKTÖREL İŞLEMLER



Şekilde **A** vektörünün A_x , A_y ve A_z gibi 3 bileşeni görülmektedir. **A** ve **B** iki vektör olsunlar. Bu vektörler;

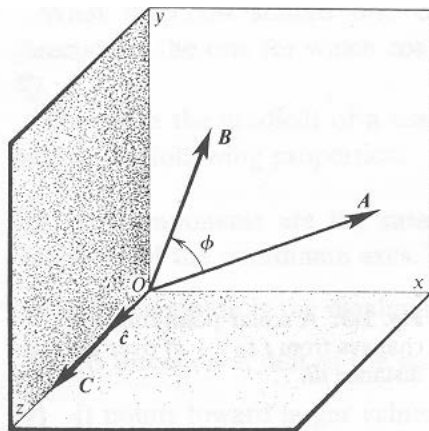
$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}, \quad \mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}, \quad (1-1)$$

Vektörlerin cebirsel işlemleri;

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z}, \quad (1-2)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \hat{x} + (A_y - B_y) \hat{y} + (A_z - B_z) \hat{z}, \quad (1-3)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \phi, \quad (1-4)$$



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin \phi \hat{c} = \mathbf{C}, \quad (1-5)$$

$$\text{Burada;} \quad A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1-6)$$

A vektörünün genliğidir.

NOT: **c** birim vektörü **A** ve **B** 'yi içeren düzleme diktir. Başka bir deyişle **C=A x B** için **C** 'nin yönü **A** 'yı **B** 'ye kapattığımızda tornavidanın ilerleme yönüdür. Ayrıca **A x B = -B x A** dir.

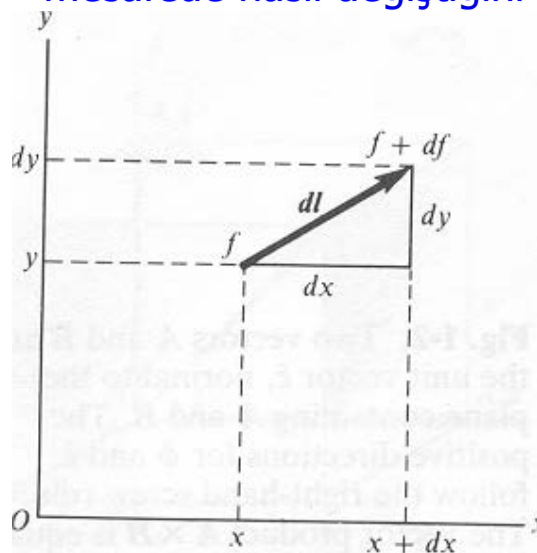
1.2.1 İNVARİYANS

TANIM : Değerleri koordinat sisteminden bağımsız olan büyüklüklere **invariant** bu özelliğede **invaryans** denir.

- | | |
|--|--|
| • Vektörler | İnvarianttır |
| • Vektörlerin bileşenleri | İnvariant değildir (Koordinat sistemine bağlı) |
| • Vektörler arası ϕ açısı | İnvarianttır |
| • $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ veya $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ | İnvarianttır |
| • $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 'nin bileşenler | İnvariant değildir (Koordinat sistemine bağlı) |
| • Skaler veya vektörel çarpma | İnvarianttır |
| • Yerçekimi kuvveti | İnvarianttır |

1.3 GRADYANT

Sıcaklık gibi bir skaler nokta fonksiyonu koordinat sisteminin fonksiyonu olan bir skaler degerdir. f gibi sürekli ve türevi alınabilir bir fonksiyon düşünelim ve dl gibi çok küçük bir mesafede nasıl değiştiğini bulmak isteyelim.



f fonkdiyonunun difransiyeli;

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1-7)$$

'dir ve iki vektörün skaler çarpımıdır. Bunlar;

$$dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \quad (1-8)$$

$$ve \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (1-9) \quad dir.$$

İkinci vektör f fonkdiyonunun gradyantı olarak adlandırılır ve bileşenleri koordinat eksenleri boyunca f 'in değişimini verir.

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

(1-10) Nabla diye okunur ve bir fonksiyonun gradyantının genliği

(1-11) 'dır. Sonuç olarak;

$$|\nabla f| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

$$df = \nabla f \cdot dl = |\nabla f| |dl| \cos \theta,$$

(1-12) Olur. Burada θ iki vektör arası açıdır.

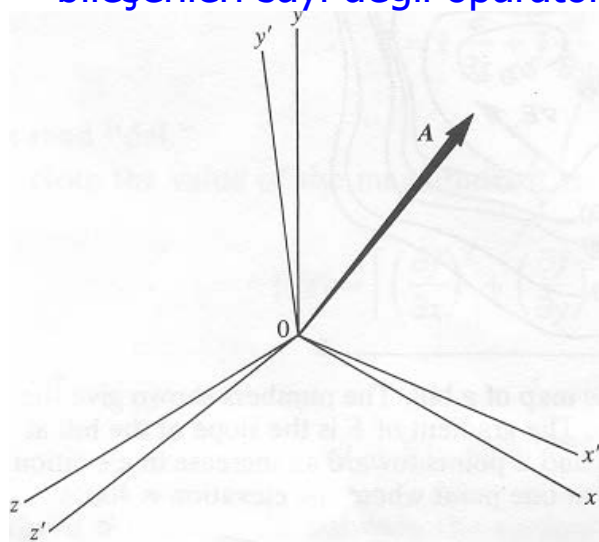
NOT: Bir skaler fonksiyonun gradyanı verilen bir noktada bir vektördür ve aşağıdaki özellikleri taşır. Bu özellikler

- Bileşenleri koordinat eksenleri yönünde fonksiyonun değişim oranıdır
- Genliği mesafe ile birlikte değişimin maksimum oranıdır
- Yönü mesafe ile birlikte değişimin maksimum oranıdır
- Yönü fonksiyonun büyüyen değerlerine doğrudur.

Gradyant bir vektördür ve skaler fonksiyonların gradyanı alınabilir. Ayrıca Gradyant **invarianttır**.

1.4 ∇ OPERATÖRÜNÜN İNVARİYANSI

∇ Operatörünün kendisi invariant mıdır? Bunu bulmak extra dikkat gerektirir çünkü ∇ nın bileşenleri sayı değil operatördür.



S ve S' iki kartezyen koordinat sistemi setini düşünelim. Şekilde de görüleceği gibi başlık olsun diye iki set aynı orijini paylaşır. Sonuç olarak $\mathbf{A}$ $A_x, A_y, A_z, A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$ şeklinde bileşenlere sahiptir. Sonuç olarak;

$$A_{x'} = a_{xx}A_x + a_{xy}A_y + a_{xz}A_z, \quad (1-13)$$

$$A_{y'} = a_{yx}A_x + a_{yy}A_y + a_{yz}A_z, \quad (1-14)$$

$$A_{z'} = a_{zx}A_x + a_{zy}A_y + a_{zz}A_z. \quad (1-15)$$

a katsayıları S' e göre S' nün oryantasyonunun bir fonksiyonudur. Eger $\mathbf{A}$ f' in gradyanı ise bileşenleri;

$$A_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (1-16)$$

Ve

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = a_{xx} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{xy} \frac{\partial f}{\partial y} + a_{xz} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1-17)$$

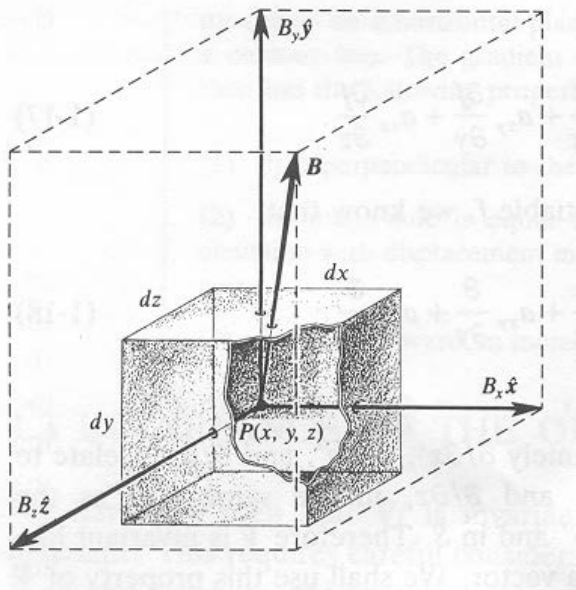
Herhangi türev alınabilir f için biliyoruz ki;

$$\frac{\partial}{\partial x'} = a_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + a_{xy} \frac{\partial}{\partial y} + a_{xz} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1-18)$$

ve benzer şekilde diğerleri içinde yazılabilir. Sonuç olarak ∇ herhangi vektör gibi invaryanttır

1.5 AKI

Genellikle bir vektörün yüzeyden geçen akısının hesaplanması gerekebilir. Tanım gereği $\mathbf{B}$ vektörünün sonsuz küçüklükteki $d\mathcal{A}$ yüzeyinden akan $d\Phi$ akısı



$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A}, \quad (1-19)$$

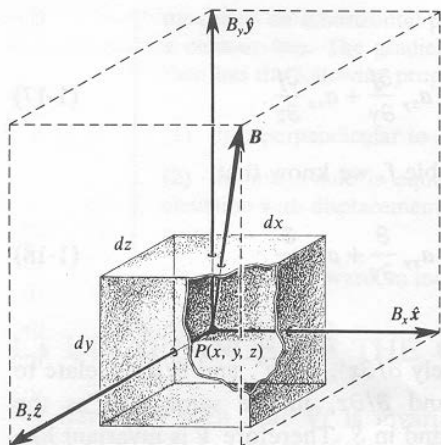
Burada $d\mathcal{A}$ yüzeye dik olan vektördür. Sonuç olarak $d\Phi$ akısı yüzeye dik olan vektörün $d\mathcal{A}$ ile çarpımının bir bileşenidir. $\mathcal{A}$ sonlu yüzeyi için;

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A}. \quad (1-20)$$

NOT: Tanım gereği $d\mathcal{A}$ vektörünün yönü yüzeyden dışa doğrudur.

1.6 DİVERJANS

Kapalı bir yüzeyden dışarı doğru akan vektör akısı ya 1.5`deki gibi yada aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Şekildeki gibi $dx dy dz$ hacmi ve bileşenleri B_x, B_y, B_z olan $\mathbf{B}$ vektörünü ele alalım



Sağ yüz merkezindeki B_x değeri o yüzün ortalaması olarak alınabilir. Hacim elementinin sağ yüzeyi boyunca dışarı akan akı;

$$d\Phi_R = \left(B_x + \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz, \quad (1-21)$$

Çünkü sağ yüzdeki $\mathbf{B}$ `nin dik bileşeni o yüzdeki  $\mathbf{B}$ `nin x bileşenidir. Hacim sonsuz küçüklükte olduğu için $\mathbf{B}$ `nin bileşenlerinin yüksek dereceli türevleri ihmal edilmiştir. Sol yüzdeki dışarı çıkan akı ise;

$$d\Phi_L = - \left(B_x - \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz. \quad (1-22)$$

Parantez önündeki – işaretinin anlamı $d\Phi_L$ dışa doğru olmasına rağmen B_x içe doğrudur. Sonuç olarak iki yüzden dışa doğru akan akı;

$$d\Phi_L + d\Phi_R = \frac{\partial B_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial B_x}{\partial x} dv, \quad (1-23)$$

Olur. Burada dv sonsuz küçüklükteki hacim elementidir. Benzer yolla diğer yüzlerden akan net akıyı hesaplamak istersek;

$$d\Phi_{\text{tot}} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dv. \quad (1-24)$$

Şimdi yapışık iki tane sonsuz küçüklükte hacim elementi alalım ve akı birinden çıkıp diğerine gitsin. Arayüzde akı eşit genlikte fakat ters işaretlidir. Bu hesabı sonlu hacime uygularsak toplam dışa doğru akan akı;

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_v \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dv. \quad (1-25)$$

Hacim içindeki herhangi verilen noktada bu değer $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$ 'dir. Sonuç olarak bu birim hacimden dışa doğru akan akıdır ve **invarianttır**. Vektörel nokta fonksiyonunun diverjansı bir skaler nokta fonksiyonudur. Skaler çarpım kuralına göre bir vektörün diverjansı **invarianttır** ve;

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (1-26)$$

1.7 DİVERJANS TEOREMİ

Şu ana kadar $\mathbf{B}$ vektörünün toplan dışa doğru olan akısı $\mathbf{B}$ 'nin dik bileşeninin yüzeysel integraline eşit olduğunu öğrendik. Kapalı $\mathcal{A}$ yüzeyinin çevrelediği hacme v dersek toplam akı;

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} = \int_v \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dv = \int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dv. \quad (1-27)$$

Bu kural herhangi türev alınabilir $\mathbf{B}$ vektörüne uygulanabilir ve;

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dv. \quad (1-28)$$

Diverjans Teoremi, Green Teoremi yada **Gauss Teoremi** olarak adlandırılır.

1.8 ROTASYONEL

Verilen herhangi $\mathbf{B}$ alını ve xy düzleminde konumlanmış kabalı bir yol için

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_x dx + B_y dy$$

$$(1-30) \quad \text{ve} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B_x dx + \oint B_y dy. \quad (1-31)$$

Şimdi Şekil`deki gibi sonsuz küçük bir yol düşünelim ve 1.31 integralini parça parça inceleyelim:

$$\oint B_x dx = \left(B_x - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left(B_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx. \quad (1-32)$$

$$\text{Sonuç olarak;} \quad \oint B_x dx = - \frac{\partial B_x}{\partial y} dy dx. \quad (1-33)$$

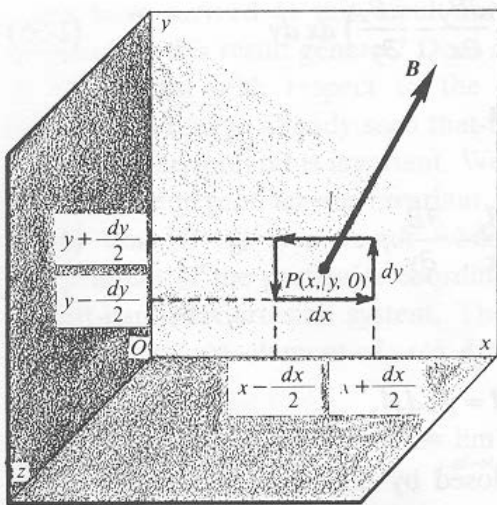
$$\text{Bulunabilir. Benzer şekilde} \quad \oint B_y dy = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy, \quad (1-34)$$

$$\text{ve} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (1-35) \quad \text{elde edilir.}$$

$$(1-36) \quad \text{dersek sonuçta} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = g_3 dA, \quad (1-37) \quad \text{olur.}$$

$$\text{Eğer} \quad g_3 = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y},$$

Dikkat edilirse bu yargı çizgisel integralin yolu tornavida kuralına göre ilerlemeyi pozitif z ekseninde yapan xy düzlemindeki pozitif yönde dönerse doğrudur.



g_3 ve diğer simetrik büyüklükleri bir vektörün bileşenleri gibi kabul edersek:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{z}, \quad (1-38)$$

olur ve ayrıca matris formatında da

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-39)$$

Şeklinde yazılabilir. Buna $\mathbf{B}$ vektörünün rotasyoneli denir.

$d\mathcal{A}$ vektörünü tornavida kuralına göre seçersek $d\mathcal{A} = d\mathcal{A} \hat{z}$ (1-40) olur ve

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A}. \quad (1-41) \text{ bulunur.}$$

Hem delta operatorü hemde vektörel çarpma invaryant olduğundan bir vektörün rotasyoneli de invaryanttır. 1.41 denkleminde de invaryanttır ve herhangi $d\mathcal{A}$ elementine uygulanabilir.

$$(\nabla \times \mathbf{B})_n = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1-42)$$

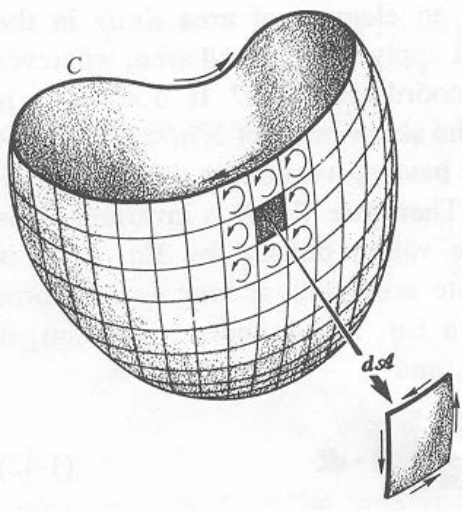
NOT:

- Genellikle $\mathbf{B}$ 'nin rotasyoneli $\mathbf{B}$ 'ye dik değildir.
- Skaler bir fonksiyonun gradyanının rotasyoneli **sıfır**'dır.

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (1-43)$$

1.9 SKOTES TEOREMİ

1.41 Denklemi yol çok küçük ise doğrudur. Bu denklemi büyük yollara uygulamak istediğimizde herhangi sonlu yüzeyi $d\mathcal{A}_1, d\mathcal{A}_2 \dots$ şeklinde Şekildeki gibi bölmemiz gerekir. Bu durumda herhangi sonsuz küçüklükteki alan için:



$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A}. \quad (1-46)$$

bulunur. Bu küçük yüzeyleri yanyana koyarsak sağ taraf yüzeysel integrale dönüşür. Sonuçta;

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A}, \quad (1-47)$$

burada $\mathcal{A}$ yüzeyi kapalı C eğrisi tarafından sınırlanan yüzeydir. Buna **Skotes Teoremi** denir.

1.10 LAPLAS OPERATÖRÜ

Skaler bir f fonksiyonunun gradyanının diverjansı f fonksiyonunun laplası olarak ifade edilir ve

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (1-50)$$

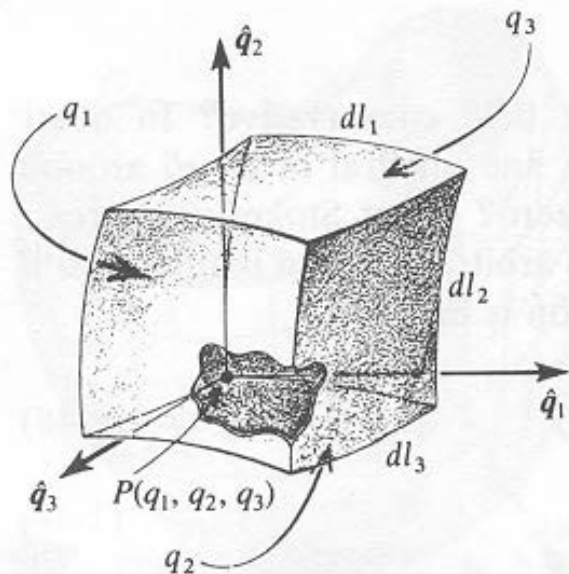
Burada ∇^2 'ye **Laplas Operatörü** denir. Laplas operatöründe **invariant** 'tır çünkü iki ardışıl invariant operasyonun sonucudur. Skaler fonksiyonun laplası olabileceği gibi vektörel bir fonksiyonunda laplası olabilir ve kartezyen koordinat sisteminde bir vektörün laplası her bir bileşeninin laplasına eşittir.

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla^2 B_x \hat{x} + \nabla^2 B_y \hat{y} + \nabla^2 B_z \hat{z}. \quad (1-51)$$

Vektörün laplasıda **invariant**tır.

1.11 KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Bazı durumlarda problemin çözümü için kartezyen koordinat sistemi yeterli olmayabilir. Bu durumda problemimize uygun koordinat sisteminin seçimi gereklidir. Bu bölümde en sık kullanılan silindirik ve küresel koordinat sistemlerinden bahsedilecektir. Ayrıca bu iki koordinat sistemi için gradyant ve diverjans gibi matamatiksel işlemlerde tanımlanacaktır.



q ' nun sabit olduğu aşağıdaki denklemi düşünelim.

$$f(x, y, z) = q, \quad (1-52)$$

Bu denklem her bir üyesi q parametresinin özel değeri tarafından karakterize edilen uzayda bir yüzey ailesini tanımlar. Mesela $x=q$ yz düzlemine paralel yüzeyleri tanımlar. Şimdi şekildeki gibi birbirine dik yüzey ailelerini tanımlayan aşağıdaki 3 denklemi düşünelim:

$$f_1(x, y, z) = q_1, \quad f_2(x, y, z) = q_2, \quad f_3(x, y, z) = q_3 \quad (1-53)$$

Diyelim ki dl_1 q_1 yüzeyine dik uzunluk elementi olsun. Bu q_1 ile $q_1 + dq_1$ arasındaki mesafedir. Sonuç olarak;

$$dl_1 = h_1 dq_1, \quad (1-54)$$

dir. Burada h_1 q_1, q_2, q_3 koordinatlarının bir fonksiyonudur. Benzer şekilde

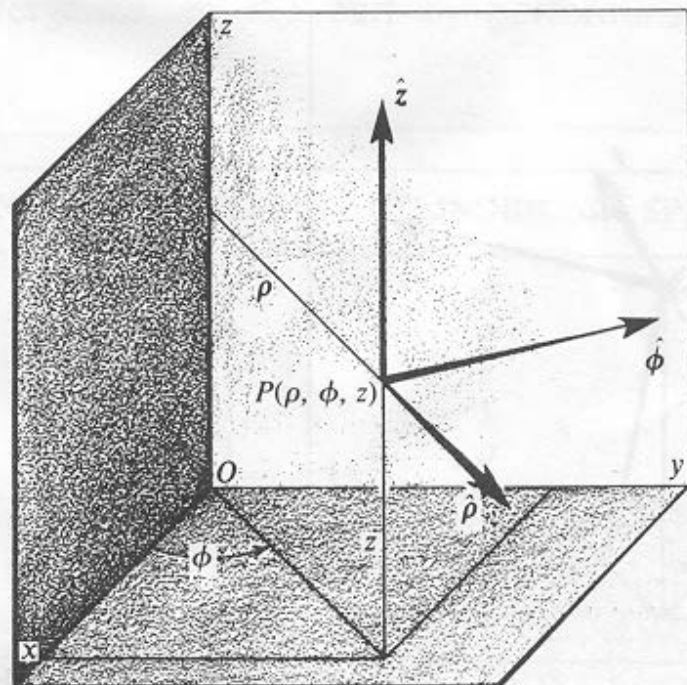
$$dl_2 = h_2 dq_2 \quad \text{and} \quad dl_3 = h_3 dq_3. \quad (1-55)$$

Kartezyen koordinat sistemlerinde h_1, h_2, h_3 1'e eşittir. $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ birim vektörleri sırası ile q_1, q_2, q_3 yüzeylerine ait birim vektörlerdir ve yönleri koordinatların artan değerlerine doğrudur. Bu üç vektörün yönü sadece kartezyen koordinat sisteminde sabit yönü gösterir diğerlerinde q_1, q_2, q_3 ile değişir. Hacim elementi ise;

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 (dq_1 dq_2 dq_3). \quad (1-56)$$

Şeklinde tanımlanır.

1.11.1 SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİ



Şekildeki **Silindirik Koordinat Sistemi**’nde $q_1=\rho$, $q_2=\phi$, $q_3=z$ dir. Herhangi bir P noktasında birim vektörleri ρ , ϕ , z olan 3 dik yön tanımlanabilir. ρ ve ϕ birim vektörleri P noktası değiştikçe aynı yönü muhafaza etmezler fakat herhangi verilen bir noktada bu 3 vektör birbirine diktir. P noktasının pozisyonunu tanımlayan vektör:

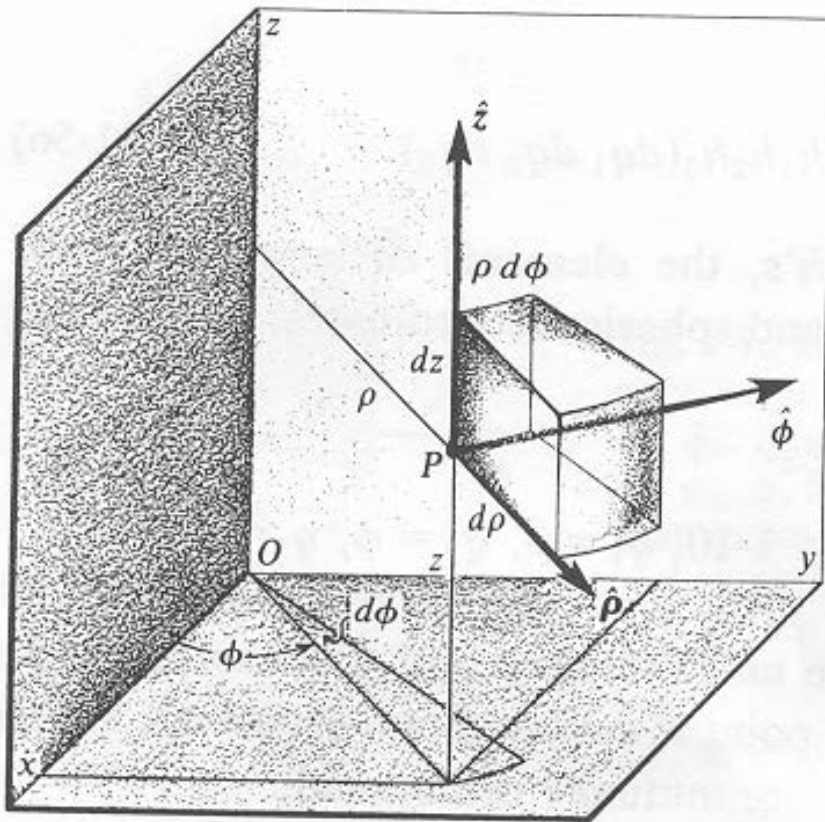
$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}. \quad (1-57)$$

dür. Dikkat edilirse ϕ denklemde gözükmez fakat ρ ’nun oryantasyonu tarafından belirlenir. Eger ϕ ve z sabitken ρ $d\rho$ kadar artarsa P noktası $d\mathbf{r}=d\rho \hat{\rho}$ kadar ilerler. Eğer ρ ve z sabitken ϕ $d\phi$ kadar artarsa P noktası $d\mathbf{r}=\rho d\phi \hat{\phi}$ kadar artar. Eğer ρ ve ϕ sabitken z dz kadar artarsa P noktası $d\mathbf{r}=dz \hat{z}$ kadar artar. Sonuç olarak herhangi artma için mesafe elementi

$$d\mathbf{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}.$$

(1-58)

Olur.



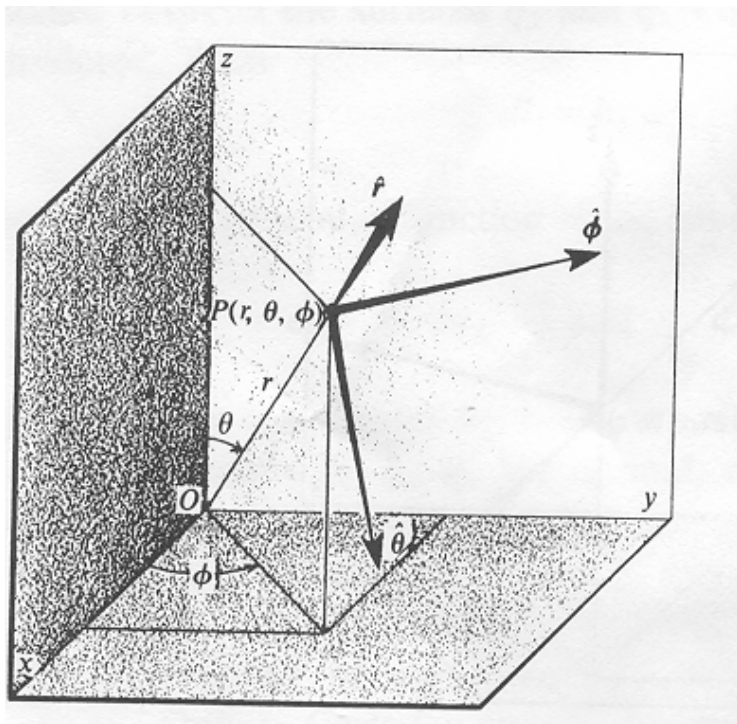
Şekilde sonsuz küçüklükteki ilerlemelere ait hacim elementi gözükmemektedir. Sonsuz küçüklükteki hacim elementi:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz.$$

(1-59)

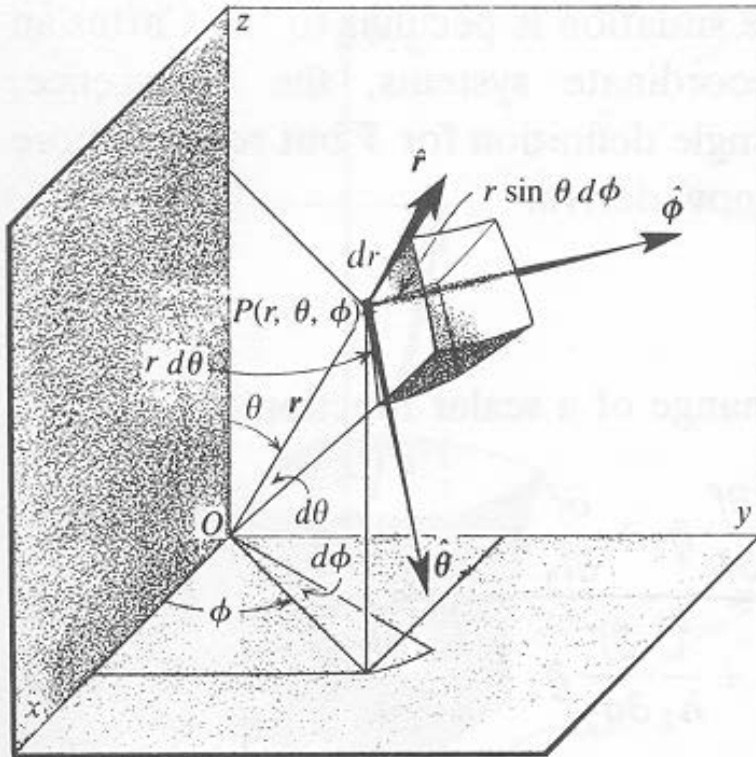
şeklinde tanımlanır.

1.11.2 KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİ



Küresel Koordinat Sistemi’nde P noktasının konumu r , θ , ϕ eksenlerine sahiptir. Herbir eksenin de birim vektörleri $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ dir ve P hareket ettikçe aynı oryantasyonu muhafaza etmezler. Birim artmalarda P`nin pozisyonunu tanımlayan vektör:

$$d\mathbf{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}. \quad (1-60)$$



Şekilde görülen hacim elementi ise

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (1-61)$$

Aşağıdaki tabloda koordinat sistemleri özetlenmiştir.

CURVILINEAR	CARTESIAN	CYLINDRICAL	SPHERICAL
q_1	x	ρ	r
q_2	y	φ	θ
q_3	z	z	φ
h_1	1	1	1
h_2	1	ρ	r
h_3	1	1	$r \sin \theta$
$\hat{q}_1$	$\hat{x}$	$\hat{\rho}$	$\hat{r}$
$\hat{q}_2$	$\hat{y}$	$\hat{\varphi}$	$\hat{\theta}$
$\hat{q}_3$	$\hat{z}$	$\hat{z}$	$\hat{\varphi}$

1.11.3 GRADYANT

f skaler fonksiyonunun değişiminin vektörel oranı:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial l_1} \hat{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \hat{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3} \hat{q}_3 \quad (1-62)$$

$$= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \hat{q}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \hat{q}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \hat{q}_3. \quad (1-63)$$

Silindirik Koordinat Sistemi için

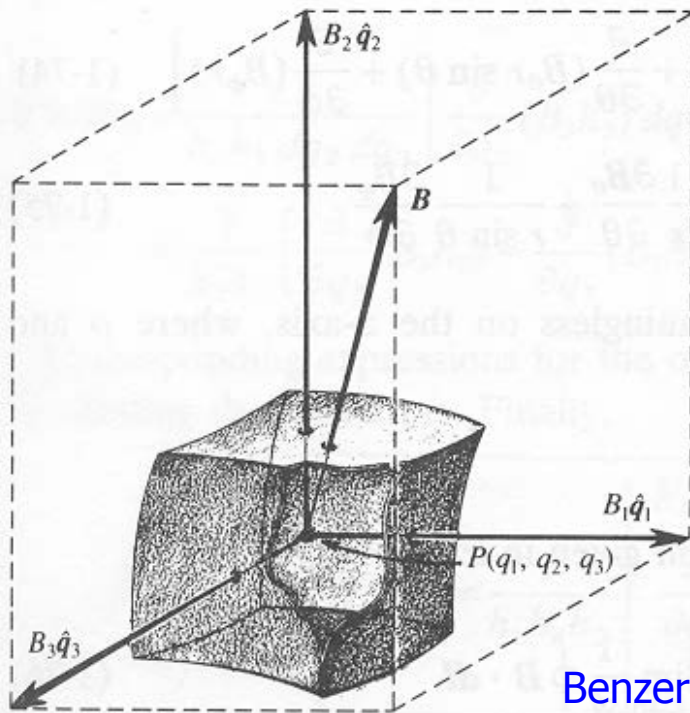
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (1-64)$$

Küresel Koordinat Sistemi için

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}. \quad (1-65)$$

NOT: z ekseninde ϕ tanımsız, ρ ve θ ise sıfırdır. Sonuç olarak 1.64 ve 1.65 anlamsızdır

1.11.4 DİVERJANS



Şekildeki hacim elementini düşünelim. B_1 merkezde $\mathbf{B}$ vektörünün q_1 bileşenidir ve h_1, h_2, h_3 o noktanın h değerleridir. Yanal yüzeyler ortogonal olduğundan sol yüzden dışa doğru akan akı:

$$d\Phi_L = -B_{1L}h_{2L}h_{3L} dq_2 dq_3 \quad (1-66)$$

$$= -\left(B_1 - \frac{\partial B_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{2}\right) \left(h_2 - \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{dq_1}{2}\right) \left(h_3 - \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \frac{dq_1}{2}\right) dq_2 dq_3. \quad (1-67)$$

h_2 ve h_3 'ün q_1 'in fonksiyonu olabileceğini unutmamamız gerekir. 3. Derece ve üzeri türevleri ihmal edilebilir ve sonuçta:

$$d\Phi_L = -B_1h_2h_3 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (B_1h_2h_3) \frac{dq_1}{2} dq_2 dq_3. \quad (1-68)$$

Benzer şekilde sağ yüz içinde;

$$d\Phi_R = B_1h_2h_3 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (B_1h_2h_3) \frac{dq_1}{2} dq_2 dq_3 \quad (1-69)$$

Sol ve sağ yüz için net akı ise:

$$d\Phi_{LR} = \frac{\partial}{\partial q_1} (B_1h_2h_3) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (1-70)$$

Bu hesaplamayı diğer yüzey çiftleri içinde tekrar edersek saran yüzeyden akan akıyı buluruz. Eğer burada hacim elementine bölersek diverjans elde edilmiş olur.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (B_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (B_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (B_3 h_1 h_2) \right] \quad (1-71)$$

Silindirik Koordinat Sistemi`inde

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-72)$$

$$= \frac{B_\rho}{\rho} + \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (1-73)$$

Küresel Koordinat Sistemi`inde

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (B_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (B_\phi r) \right] \quad (1-74)$$

$$= \frac{2}{r} B_r + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}. \quad (1-75)$$

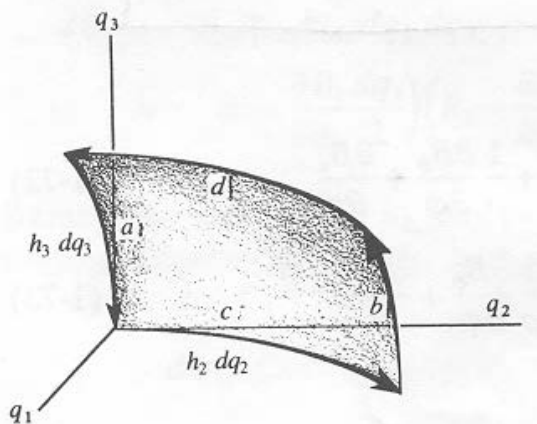
NOT: z ekseninde diverjanslar ρ ve $\sin \theta$ sıfır olduğundan anlamsızdır

1.11.5 ROTASYONEL

q_1 = sabit olan yüzeyde ve tornavida kuralına göre yönü $\mathbf{q}_1$ `i verecek şekilde kapalı C eğrisi üzerinden denklem 1.42 uygulanabilir. Sonuçta;

$$(\nabla \times \mathbf{B})_1 = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{A}} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1-76)$$

Şekildeki a, b, c, d yolları için çizgisel integrale aşağıdaki katkılarımız olur



$$\begin{aligned} & -B_3 h_3 dq_3, \\ & \left(B_3 + \frac{\partial B_3}{\partial q_2} dq_2 \right) \left(h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_3, \\ & +B_2 h_2 dq_2, \\ & -\left(B_2 + \frac{\partial B_2}{\partial q_3} dq_3 \right) \left(h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial q_3} dq_3 \right) dq_2. \end{aligned}$$

Bu 4 terimin toplamının alan elementine bölümümü $\mathbf{B}$ `nin rotasyonelinin 1. Bileşenini verir.

$$(\nabla \times \mathbf{B})_1 = \frac{1}{h_2 h_3 dq_2 dq_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (B_3 h_3) dq_2 dq_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} (B_2 h_2) dq_2 dq_3 \right] \quad (1-77)$$

$$= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (B_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (B_2 h_2) \right]. \quad (1-78)$$

Rotasyonelin diğer bileşenleri için ilgili ifadeler altindisleri çevirerek bulunabilir. Sonuç olarak,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{q}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{q}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{q}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 B_1 & h_2 B_2 & h_3 B_3 \end{vmatrix} \quad (1-79)$$

Silindirik Koordinat Sistemi`inde

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_\rho & \rho B_\phi & B_z \end{vmatrix}, \quad (1-80)$$

Küresel Koordinat Sistemi`inde

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ B_r & r B_\theta & r \sin \theta B_\phi \end{vmatrix}. \quad (1-81)$$

NOT: z ekseninde yukardaki ifadeler geçerli değildir.

1.11.6 LAPLAS

Genel bir koordinat sisteminde skaler bir fonksiyonun laplası gradyantın diverjansı olarak tanımlanır:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \quad (1-82)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-83)$$

Silindirik Koordinat Sistemi`inde

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1-84)$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (1-85)$$

Küresel Koordinat Sistemi`nde

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1-86)$$

$$= \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}, \quad (1-87)$$

Kartezyen Koordinat sisteminde bir **B** vektörünün laplası her bir bileşeninin laplaslarının toplamına eşittir. Diğer koordinat sistemlerinde;

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1-88)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (1-89)$$

Denkleminin çözümünden bulunur.

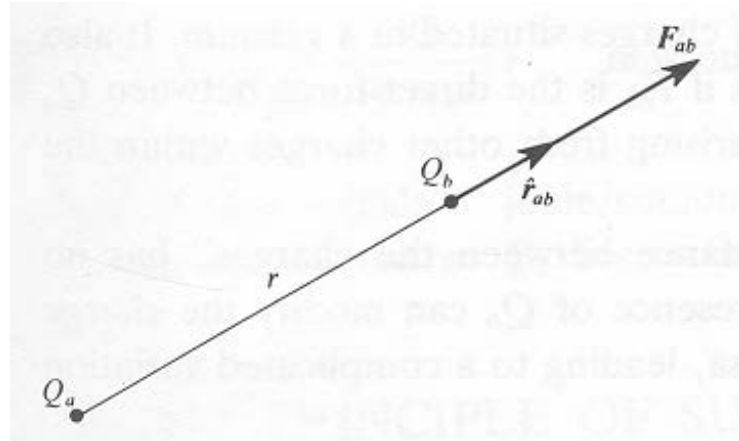
2. ELEKTRİK ALANLAR I.

- Giriş
- Coulomb Yasası
- Elektrik Alan Şiddeti ($\mathbf{E}$)
- Süperpozisyon Kuralı
- Elektriksel Potansiyel ve $\mathbf{E}$ 'nin Rotasyoneli
- Eşpotansiyel Yüzeyler ve $\mathbf{E}$ Çizgileri
- Gauss Yasası

2.1 GİRİŞ

Bu bölümden itibaren elektrik yükünün depolanmasından doğan elektrik alanlar incelenecektir. Yükler genellikle durağandırlar. Yükler hareket ettikleri zaman hızlarının ihmal edilecek kadar küçük olduğu kabul edilecektir. Bu kabul bu tür yüklerin de duraganmış gibi alanlarını hesaplayabilmemizi sağlar. Ayrıca manyetik alanlarda yok sayılacaktır. Bu bölümde elektrik alanlar için temel olan Coulumb ve Gauss yasaları ile ilgilenecektir.

2.2 COULOMB YASASI



Deneyleri göstermiştir ki durağan bir Q_a yükü kendisinden r kadar uzaklıkta bulunan durağan Q_b yüküne bir kuvvet uygular ve

$$\mathbf{F}_{ab} = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}, \quad (3-1)$$

Formülü ile hesaplanır. Buna **Coulomb Yasası** denir. 3.1 denkleminde $\mathbf{r}_{ab}$ yönü Q_a dan Q_b ye olan birim vektördür. Oluşan bu kuvvet yükler aynı işaretli ise

birbirlerini itecek yönde farklı işaretli ise birbirlerini çekecek yöndedir. Yüklerin birimi **Coulomb**, kuvvetin birimi **Newton** ve mesafenin birimi **metre** dir. ϵ_0 sabitine **elektriksel geçirgenlik**

denir ve değeri

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ farad/meter}. \quad (3-2)$$

ϵ_0 'ın değerini 3.1`de yerine koyarsak;

$$\mathbf{F}_{ab} \approx 9 \times 10^9 \frac{Q_a Q_b}{r^2} \text{ newtons}, \quad (3-3)$$

bulunur.

Q_a ve Q_b yükleri durağan olmasalar bile aşağıdaki şartlarda **Coulomb Yasası** uygulanabilir mi?

1. Eğer Q_a durağan Q_b durağan değilse Q_b 'nin yükü ne olursa olsun Q_b üzerindeki kuvveti hesaplamada **Coulomb Yasası** uygulanabilir. Bu deneysel bir sonuçtur. Gerçekte osilosyoplarda ve iyon hızlandırıcılarda kuvvet bu yolla hesaplanır.
2. Eğer Q_a da hareketli ise **Coulomb Yasası** geçerli değildir.

Coulomb Yasası boşluktaki yüklere uygulanabildiği gibi yalıtıkandaki ve iletken içindeki yüklerin birbirlerine uyguladığı direk kuvveti hesaplamada kullanılabilir. Fakat bu hesaplamada medyada bulunan diğer yüklerden doğan kuvvet dikkate alınmamalıdır.

KIYASLAMA : Elektriksel Kuvvet – Yerçekimi Kuvveti

$$F_{ab} \approx 9 \times 10^9 \frac{Q_a Q_b}{r^2} \quad \text{newtons,} \quad (3-3)$$

$$F = 6.67259 \times 10^{-11} \frac{m_a m_b}{r^2}. \quad (3-4)$$

NOT: Deneyler göstermiştir ki hiçbir atom yada molekül en fazla 10^{-20} elektrik yükü bulundurabilir.

TANIM: Bir kablodan saniyede 1 Coulomb`luk yük akarsa akan akım 1 **amper`** dir.

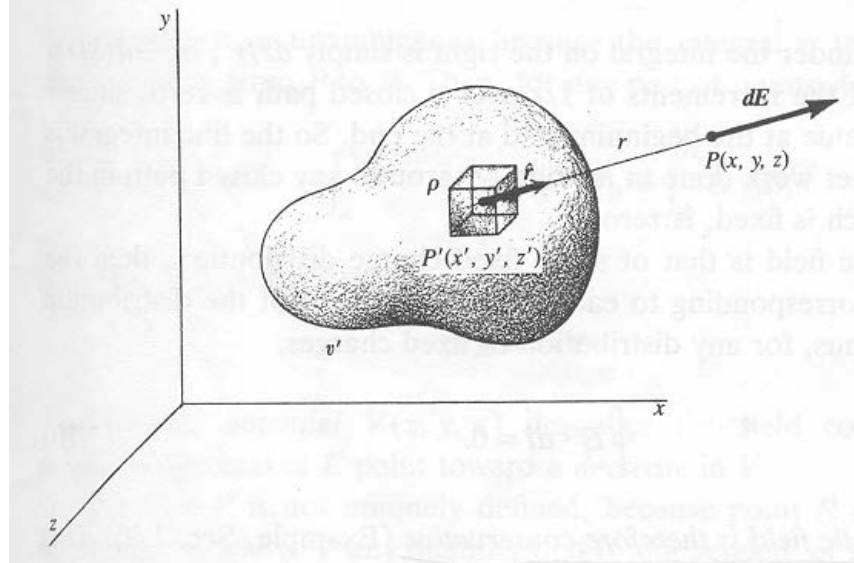
2.3 ELEKTRİK ALAN ŞİDDETİ (E)

Q_a ve Q_b gibi iki elektrik yükü arasındaki kuvvet Q_b 'nin konumunda Q_a 'nın alanının Q_b 'yi etkilemesinden yada tersinden oluşur. Sonuç olarak bir noktadaki **elektrik alan şiddeti (E)** o noktada bulunan 1 birimlik yüke etkiyen kuvvet olarak tanımlanabilir. Böylece Q_a yükünden r kadar uzaktaki elektrik alan şiddeti;

$$\mathbf{E}_a = \frac{\mathbf{F}_{ab}}{Q_b} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{newtons/coulomb, or volts/meter,} \quad (3-5)$$

2.4 SÜPERPOZİSYON KURALI

Eğer bir ortamda birden fazla elektrik yükü varsa hebriri kendi alanını üretir ve toplam alan her bir yükün elektrik alanlarının vektörel toplamına eşittir. Buna **süperpozisyon kuralı** denir.



Şekildeki gibi sürekli yük dağılımı için (x, y, z) noktasındaki elektrik alan şiddeti

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dv', \quad (3-6)$$

burada $\rho (x', y', z')$ kaynak noktasındaki hacimsel yük yoğunluğudur. $\mathbf{r}$ birim vektörünün yönü P' noktasından P noktasına doğrudur, r de bu iki nokta arasındaki mesafe ve dv' hacim elementidir.

Eğer ortamda yüzeysel yük yoğunluğu da varsa benzer bir integrali de eklememiz gerekir. Bu ikinci integralde hacimsel yük yoğunluğu (ρ) yerine yüzeysel yük yoğunluğu (σ), dv yerinede dA yazılmalı ve hacimsel integral yüzeysel integrale dönüştürülmelidir.

2.5 ELEKTRİKSEL POTANSİYEL (V) VE E`NİN ROTASYONELİ

Bir elektrik alanı içinde hareket edebilen Q' yükünü düşünelim. A noktasından B noktasına verilen bir yoldan sabit bir hızda hareket edebilmesi için gerekli $\mathcal{E}$ enerjisi

$$\mathcal{E} = - \int_A^B \mathbf{E} Q' \cdot d\mathbf{l}. \quad (3-7)$$

Negatif işaret nedeni ile iş alana karşı yapılmıştır. Bura Q' yükü alanı oluşturan yük dağılımını değiştirmeyecek kadar küçük olduğu kabul edilmiştir. Eğer yol kapalı ise Q' yükü üzerinde yapılan toplam iş:

$$\mathcal{E} = - \oint \mathbf{E} Q' \cdot d\mathbf{l}. \quad (3-8)$$

Şimdi 3.8`de verilen integrali bir inceleyelim. İlk önce elektrik alanı bir noktasal Q yükünün oluşturduğunu kabul edelim. Sonuçta;

$$\oint \mathbf{E} Q' \cdot d\mathbf{l} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}}{r^2}. \quad (3-9)$$

Denklemin sağındaki dr/r^2 yada $-d(1/r)$ terimini düşünelim. Kapalı bir yol üzerinden $1/r$ `nin integrali **sıfır** `dır. Çünkü r değerinin başlangıç ve bitiş değeri aynıdır. Sonuç olarak 3.9`da verilen çizgisel integral herhangi sabit  $Q$  yükü için **sıfır** `dır. Sonuç olarak:

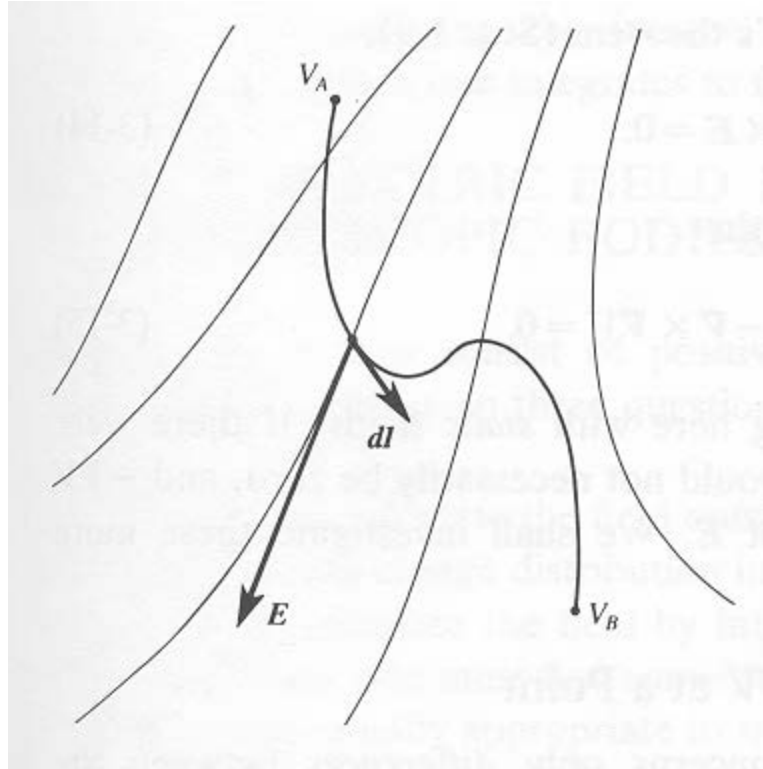
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (3-10)$$

`dır. Bu bize elektrostatik alanın korunumlu olduğunu gösterir. Bunu Coulomb kuvvetinin merkezi olduğu gerçeği takip eder. Şimdi test yükünü sabit hızda A noktasından B noktasına sabit hızda götürmek için yapılan işin yoldan bağımsız olduğunu gösterebiliriz. A`dan B`ye giden  $m, n$  gibi iki farklı yol düşünelim. Bu iki yol kapalı bir yol oluşturduğundan 3.10 gereği yapılan iş **sıfır** `dır. Sonuç olarak m `de yapılan iş  $n$ `de yapılan işe eşit olmalıdır.

$R(x_o, y_o, z_o)$ gibi bir başlangıç noktası seçelim ve $P(x, y, z)$ noktasında V gibi skaler fonksiyon tanımlayalım. P noktasının potansiyeli:

$$V_P = \int_P^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3-11)$$

Bu tanım açık değildir çünkü bu integral P `den  $R$ `ye her yol için aynıdır.



Şekildeki gibi herhangi A ve B nokta çiftini ele alalım.

$$-\int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3-12)$$

ve böylece

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (3-13)$$

$V(x,y,z)$ elektrik potansiyeli alanı bütünüyle tanımlar. – işareti alanın yönünü ∇ nin azalma yönünde yapar. Dikkat edilirse R tesadüfı seçildiği için V tek değildir. Gerçekte $\mathbf{E}$ 'yi etkilemeden V 'ye koordinat sisteminden bağımsız değer ekleyebiliriz yada çıkartabiliriz. 3.10 denklemi ve **Skotes Teoremi**'nden

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3-14)$$

Bu sonuç skaler bir fonksiyonun gradyantının diverjansı sıfırdır gerçeğinden de bulunabilir.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla V = 0. \quad (3-15)$$

NOT : 3.15 sadece statik alanlarda geçerlidir. Eğer zamanla değişen bir akım varsa 3.15 sıfır olmaz ve $-\nabla V$ yalnızca $\mathbf{E}$ 'nin belli bir bölümünü tanımlar

2.5.1 BİR NOKTANIN ELEKTRİKSEL POTANSİYELİ

Denklem 3.12 göstermiştir ki $\mathbf{E}$ sadece iki nokta potansiyelleri arasındaki diferansiyelle alakalıdır. Verilen bir noktanın potansiyelinden bahsedilebilmesi için potansiyeli sıfır olan tesadüfi bir bölge bulunmalıdır. Bunun anlamı R noktasının potansiyeli sıfır yapılmalıdır. Yükler sonlu bir bölgede yayıldığı zaman sonsuzdaki bir noktanın potansiyeli sıfır alınabilir. Bu durumda P noktasının potansiyeli:

$$V = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3-16)$$

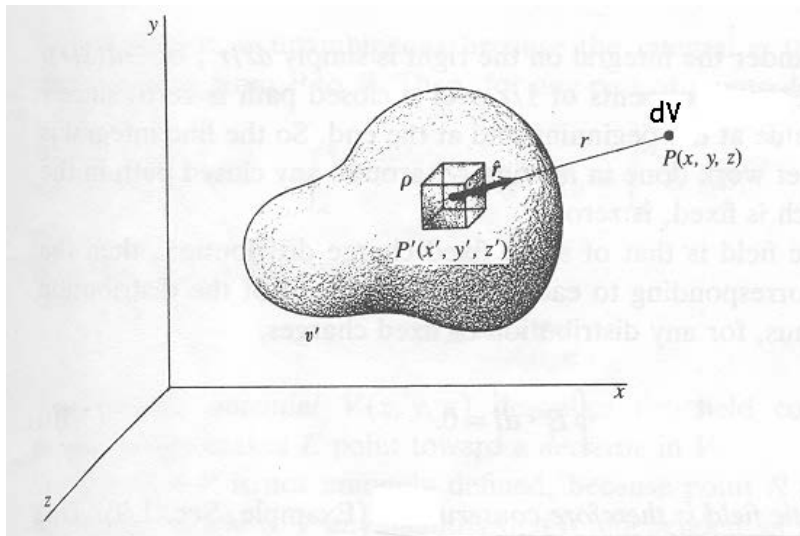
Q yükünü potansiyeli sıfır olan bir noktadan P 'ye getirebilmek için gerekli olan enerji VQ 'dur. Sonuçta $V = E / Q$ olur ve birimi joule/ Coulomb veya volt 'tur.

Eğer alan tek bir noktasal yükün alanı ise;

$$V = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3-17)$$

V potansiyelinin işareti Q 'nun işareti ile aynıdır.

Süperpozisyon kuralı $\mathbf{E}$ 'nin hesaplanmasında kullanılabileceği gibi herhangi bir yük dağılımının V potansiyelinin hesaplanmasında da kullanılabilir.



Sürekli yük dağılımından r kadar uzaklıktaki bir noktanın potansiyeli:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho dv'}{r}, \quad (3-18)$$

3.18'deki v' bütün yükleri çevreler. Eğer ortamda yüzeysel yük yoğunlukları da varsa yüzeysel integral de eklenmelidir.

2.6 EŞPOTANSİYEL YÜZEYLER VE $\mathbf{E}$ ÇİZGİLERİ

Uzayda verilen bir potansiyeldeki bütün noktalar eşpotansiyel yüzeyi tanımlar. Mesela noktasal bir yükün eşpotansiyel yüzeyi merkezinde o yükün bulunduğu küredir. Çünkü:

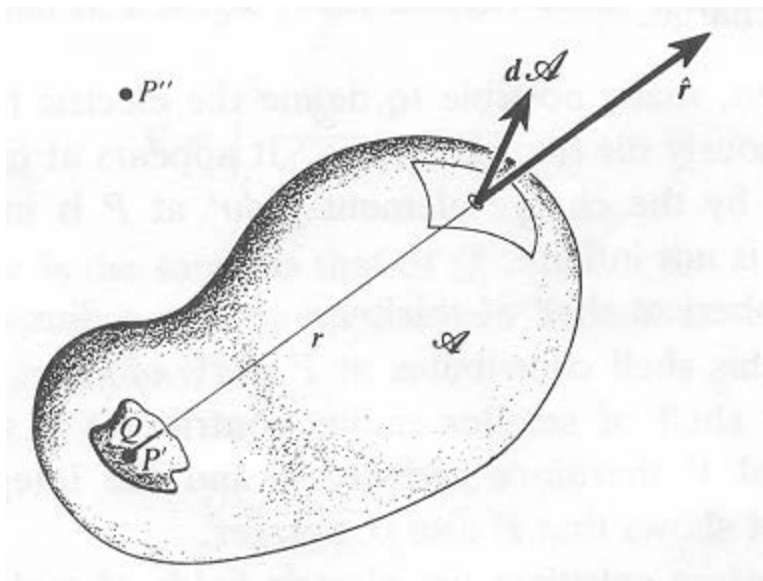
$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (3-13)$$

∇V dır ve $\mathbf{E}$ her yerde bu eşpotansiyel yüzeyine diktir.

Eğer $\mathbf{E}$ yönündeki sonsuz küçüklikteki $d\mathbf{s}$ vektörlerini $\mathbf{E}$ çizgileri elde edilmiş olur.

2.7 GAUSS YASASI

Gauss Yasası kapalı bir yüzeyden dışarıya doğru akan **E** akısını o yüzey içinde bulunan net yük ile alakalandırır.



Şekildeki gibi yüzeyi $\mathcal{A}$ ve hacmi v olan ve Q yükünü çevreleyen bir yapı düşüneli. $\mathcal{A}$ yüzeyinden dışarı doğru akan **E** akısı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$d\mathcal{A}$ yüzeyinden dışarı doğru akan **E** akısı:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathcal{A}}{r^2}. \quad (3-19)$$

$\mathbf{r} \cdot d\mathcal{A}$ $\mathbf{r}$ 'ye dik olan düzlemde $d\mathcal{A}$ 'nın projeksiyonudur. Böylece

$$\mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \quad (3-20)$$

Burada $d\Omega$ P' noktasında kütle açısıdır. Dışarıya çıkan **E** akısını bulmak için $\mathcal{A}$ yüzeyi üzerinden veya 4π kütle açısı üzerinden integrasyon gerekir.

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3-21)$$

P'' noktasında Q yüzeyin dışında ise bu integral **sıfır**´dır. v hacmi içinde birden fazla yük varsa akılar cebirsel olarak toplanır ve v hacminden dışa çıkan net **E** akısı sarmalanan yükün ϵ_0 ´a bölünümüne eşittir.

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3-22)$$

ye **Gauss Yasası**´nın integral formu denir. Eğer yük sonlu bir hacmi kaplarsa:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho \, dv, \quad (3-23)$$

Burada A v ´yi çevreleyen kapalı yüzey ve ρ ´da hacimsel yük yoğunluğudur. Burada yüzeysel yüklerin bulunmadığı kabul edilmiştir. 3.23 denkleminde **Diverjans Teoremi**´ni uygularsak

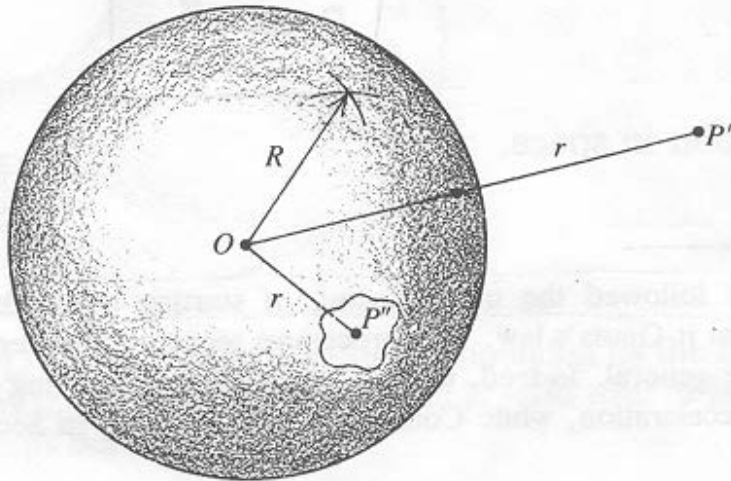
$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho \, dv. \quad (3-24)$$

ve

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-25)$$

Bulunur. Buna **Gauss Yasası**´nın diferansiyel formudur.

ÖRNEK: Düzgün Küresel Yük dağılımının Elektrik Alanı



Şekildeki gibi yarıçaplı R ve düzgün hacimsel yük yoğunluğu ρ olan bir küreyi düşünelim ve $\mathbf{E}$ ve V 'yi r 'nin fonksiyonu olarak bulmaya çalışalım. Simetri gereği hem $\mathbf{E}$ hemde V ϕ ve θ 'dan bağımsızdır.

Simetri gereği $\mathbf{E}$ radyaldır ve Q pozitifse dışa doğrudur.

(a) Elektrik Alan Şiddeti ($\mathbf{E}$)

Dışarıdaki alan değişimini bulmak için $r > R$ olan P' noktasını ele alalım. Bu noktada yarıçapı r ve yüzey alanı $4\pi r^2$ olan hayali bir küre düşünelim

Hayali küre tarafından çevrelenen yük gereği

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

(3-26) ' dir. Gauss yasası

$$E_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (3-27)$$

Olur. Şimdi kürenün içinde P'' noktasını ele alalım. Hayali küre tarafından çevrelenen yük $Q(r/R)^3$ 'dür. Tekrar Gauss yasasını uygularsak;

$$E_i = \frac{Q(r/R)^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (3-28)$$

(b) Elektriksel Potansiyel (V) P' noktasının potansiyeli

$$V_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3-29)$$

P'' noktasının potansiyelini bulmak için $V = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. (3-16) denklemi
kullanılırsa

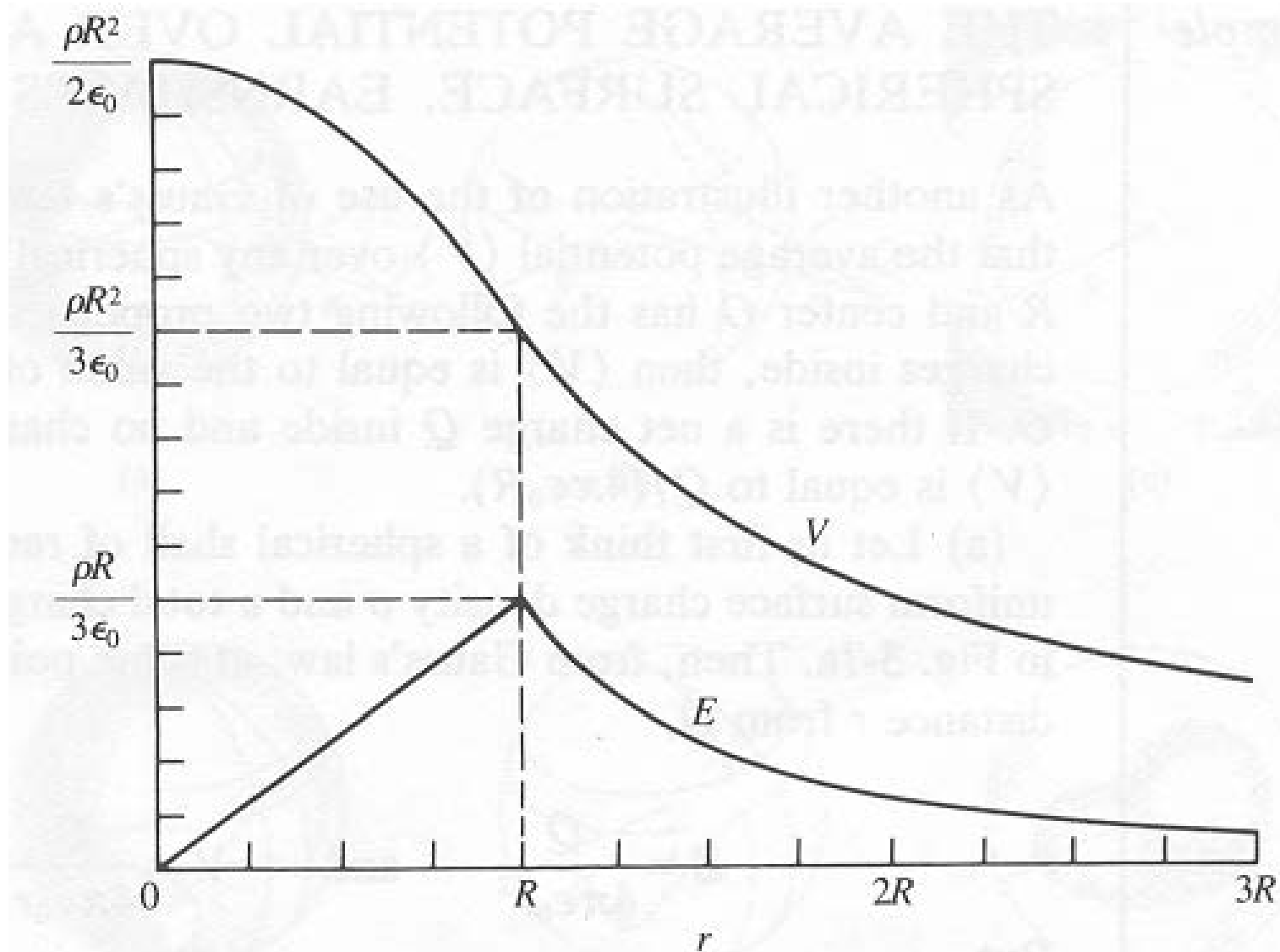
$$V_i = \int_r^\infty \mathbf{E} \, dr = \int_r^R \mathbf{E}_i \, dr + \int_R^\infty \mathbf{E}_o \, dr. \quad (3-30)$$

Son integral basitçe Q noktasal yükünün $r=R$ deki integralidir. Sonuç olarak

$$V_i = \int_r^R \frac{Qr \, dr}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right). \quad (3-31)$$

EMÜ241 ELEKTROMANYETİK I.

Yrd. Doç Dr. Hasan H. Balık



3. ELEKTRİK ALANLAR II.

- Giriş
- Poisson ve Laplace Denklemleri
- Elektrik Yükünün Korunumu Kanunu
- İletkenlik
- Durağan alan içinde izole iletken

3.1 GİRİŞ

Poisson denklemi lokal hacimsel yük yoğunluğunu potansiyel konumsal değişimi ile alakalandırır ve Gauss yasasını takip eden temel bir denklemdir. Laplace denklemi ise Poisson denkleminin özel bir halidir ve ρ **sıfır**`a eşittir. Her ikisinde Elektrik alanının hesabında kullanılır.

Yükün korunumu deneysel bir gerçektir. Şartlar ne olursa olsun kapalı sistem tarafından taşınan net elektrik yükü sabittir.

Bu bölümün büyük kısmı iletkenlikle alakalıdır. Elektriksel iletkenler uygulanan **E** alanına zıt yönde sürüklenen iletkenlik elektronu içerirler. Bu sürüklenme hızı çok düşük ve net hacimsel yük yoğunluğu normalde **sıfır**`dır.

3.2 POISSON VE LAPLACE DENKLEMLERİ

3.25 Denkleminde **E** yerine 3.13 denklemini koyarsak **Poisson Denklemi** elde edilmiş olur. Bu;

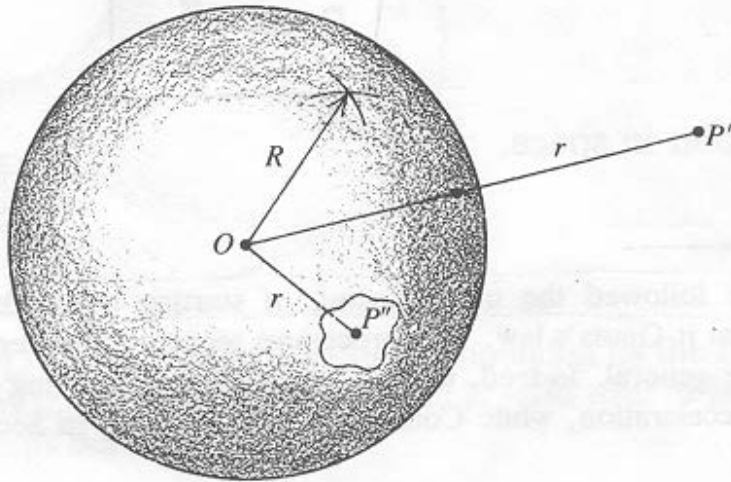
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4-1)$$

Poisson Denklemi verilen bir noktada uzaysal yük yoğunluğunu o nokta bölgesindeki potansiyelin 2. Derece türevi ile alakalandırır. Hacimsel yük yoğunluğu **sıfır** olan bolgede

$$\nabla^2 V = 0, \quad (4-2)$$

Buna **Laplace Denklemi** denir.

ÖRNEK: Düzgün Küresel Yük dağılımının Elektrik Alanı



Şekildeki gibi yarıçaplı R ve düzgün hacimsel yük yoğunluğu ρ olan bir küreyi Poisson ve Laplace denklemlerini kullanarak çözelim. Kürenin dışında $\rho=0$ ve

$$\nabla^2 V_o = 0. \quad (4-3)$$

Simetri gereği V_o ϕ ve θ 'dan bağımsızdır. Sonuçta 1.11.6 bölümünden

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_o}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_o}{\partial r} \right) = 0, \quad (4-4)$$

$$\frac{\partial V_o}{\partial r} = \frac{A}{r^2}, \quad E_o = -\frac{A}{r^2}, \quad (4-5)$$

Burada A integrasyon sabitidir. Bu 3.27 denklemi ile uyuşur ($A=Q/4\pi\epsilon_0$).

Kürenin içinde

$$\nabla^2 V_i = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4-6)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_i}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_i}{\partial r} \right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0}, \quad (4-8)$$

$$r^2 \frac{\partial V_i}{\partial r} = -\rho \frac{r^3}{3\epsilon_0} + B, \quad (4-9)$$

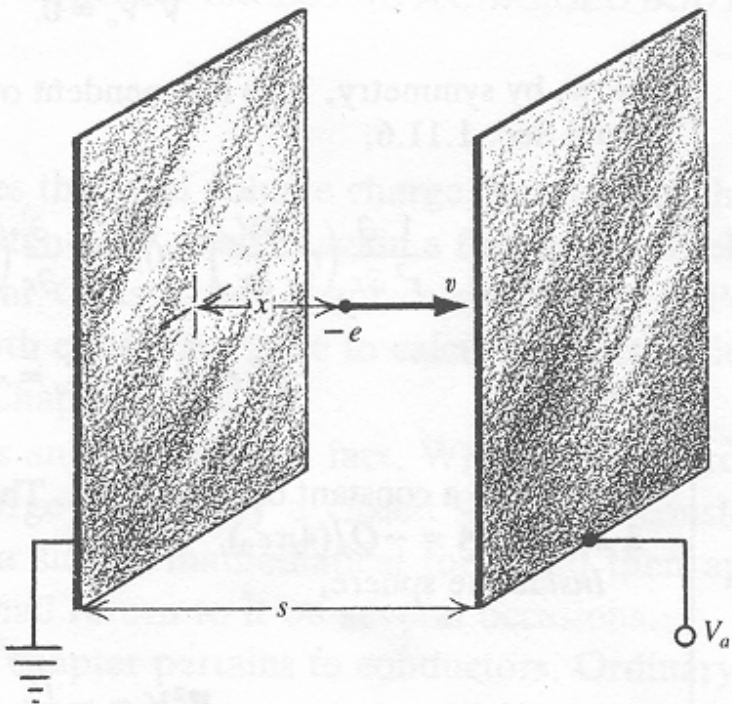
$$E_i = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{B}{r^2}, \quad (4-10)$$

Burada B bir diğrintegrasyon sabitidir. Sınır koşullarından E_i $r=0$ 'da sonsuz olamaz şartı kullanılırsa $B = 0$ olmalıdır ve sonuç olarak

$$E_i = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (4-11)$$

Bulunur.

ÖRNEK: Vakum Diyod



Şekildeki gibi anot ve katodu düzlem, paralel ve birbirinden s kadar uzakta olan vakum diyodun düzlemler arası potansiyel değişimini hesaplayalım. s mesafesi düzlemlerin yüzey alanına göre ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

Katodun sıfır potansiyelde ve anadunda V_a potansiyelinde olduğunu kabul edelim. Isınan katot anoda doğru hızlanan elektronlar bırakır. Bırakılan elektronların başlangıç hızlarının sıfır olduğunu ve akımın anodun sıcaklığına değil V_a gerilimine bağlı olduğunu varsayalım. Hipotez gereği V sadece x eksenine bağlı olduğu için Poisson denklemi

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4-12)$$

Haline gelir. Burada uzaysal yük yoğunluğu negatiftir. Sonuçta d^2V/dx^2 pozitiftir. ρ akım yoğunluğunun elektron hızının bölümüne eşittir. Sonuç olarak

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0 v}, \quad (4-13)$$

Burada J akım yoğunluğunun genliğidir. Enerjinin korunumundan;

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \quad (4-14)$$

Burada m elektronun kütlesi $-e$ değeri $+1.6 \times 10^{-19}$ C olan elektron yüküdür. Böylece

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0 (2eV/m)^{1/2}} \quad (4-15)$$

İntegre edebilmek için 4.15 denkleminin sol tarafı $2(dV/dx)dx$ sağ tarafı ise $2dV$ ile çarpılır. Buradan;

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4J(mV/2e)^{1/2}}{\epsilon_0} + A, \quad (4-16)$$

Burada A integrasyon sabitidir.

Şimdi A integrasyon sabitinin bulunması gerekir. Katotta $V=0$ ve $A=(dV/dx)^2$ `dır. Fakat  $dV/dx$  `de aşağıdaki nedenlerden dolayı sıfırdır. Eğer katot soğuk olduğu zaman anoda gerilim uygulanırsa dV/dx pozitif ve V_a/s `e eşittir. Eğer birisi katodu ısıtırsa elektron bırakır ve  $dV/dx$  düşer.  $dV/dx$  pozitif olduğu sürece salınan elektronlar anoda doğru hızlanır ve katoda geri dönemez. Bu durumda akım termionik emisyon tarafından sınırlanır. Buda akımın sadece  $V_a$  `ya bağlıdır kabulumüze aykırıdır. Sonuçta dV/dx pozitif olamaz. Eğer dV/dx negatif olursa elektronlar katottan hiçbir zaman ayrılamaz. Sonuç olarak dV/dx ne pozitif nede negatif olabilir sıfır olmalıdır böylece $A=0$ `dır. Böylece;

$$\frac{dV}{dx} = 2 \left(\frac{J}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/4} V^{1/4}, \quad (4-17)$$

$$V^{3/4} = 1.5 \left(\frac{J}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/4} x + B. \quad (4-18)$$

$x=0$ `da  $V=0$  olduğundan  $B=0$  `dır. Bu durumda

$$V = \left(\frac{9J}{4\epsilon_0} \right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/3} s^{4/3} \left(\frac{x}{s} \right)^{4/3}. \quad (4-19)$$

$x=s$ `de $V=V_a$ olur. Sonuç olarak

$$V = V_a \left(\frac{x}{s} \right)^{4/3}. \quad (4-20)$$

E nin işaretini dikkate almazsak;

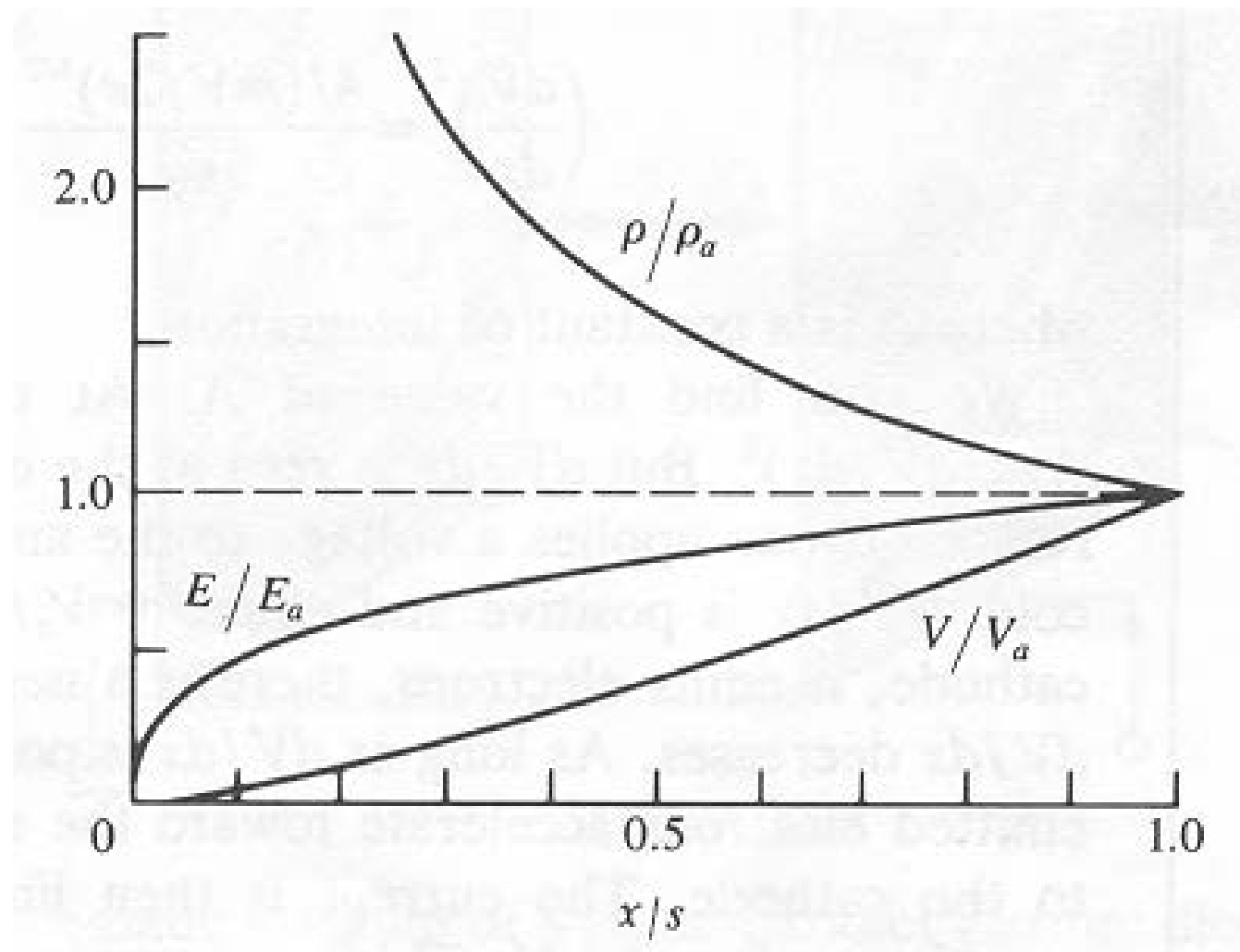
$$E = \frac{4}{3} \frac{V_a}{s} \left(\frac{x}{s} \right)^{1/3}, \quad (4-21)$$

$$J = \frac{4\epsilon_0(2e/m)^{1/2}V_a^{3/2}}{9s^2} = 2.335 \times 10^{-6} \frac{V_a^{3/2}}{s^2} \quad \text{amperes/meter}^2, \quad (4-22)$$

$$\rho = \frac{4\epsilon_0 V_a}{9s^2(x/s)^{2/3}}. \quad (4-23)$$

4.22 denklemine **Child-langmuir Yasası** denir. Bu yasa sadece köşe etkisinin ihmal edilebildiği düzlemsel paralel diyodda geçerlidir.

Şekilde V , E ve $\rho x/s$ 'nin fonksiyonu olarak çizilmiştir.



3.3 ELEKTRİK YÜKÜNÜN KORUNUMU KANUNU

v hacminde ve $\mathcal{A}$ kapalı yüzeyini ele alalım. v hacminin içindeki yük yoğunluğu ρ olsun. Yükler içe ve dışa doğru hareket eder ve yüzeyde verilen bir noktada akım yoğunluğu $\mathbf{J}$ amper / metre² dir. Deneyler göstermiştir ki yeni bir elektrik yükü oluşmamaktadır. Herhangi bir andaki yük akışı kapalı alandaki Q yükünü azaltır.

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = -\frac{dQ}{dt}, \quad (4-24)$$

Burada $d\mathbf{A}$ 'nın yönü dışa doğrudur. Diverjans teoremini 4.24 üzerine uygularsak

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv. \quad (4-25)$$

Sonuç olarak;

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4-26)$$

4.24 ve 4.26 denklemleri sırası ile elektrik yükünün korunumu kanununun integral ve diferansiyel formudur.

3.4 İLETKENLİK

Bakır veya aliminyum gibi iyi iletkenler malzeme içinde serbestçe gezinebilen bir veya iki iletkenlik elektronu bulundurlar. Yarı-iletkenler ise iki tür hareketli üke sahiptirler bunlar **elektron** ve **delik**`lerdir. Delik pozitif yüklü elektron gibi davranır. Birçok iletken ve yarı-iletkende akım yoğunluğu (**J**) ile elektrik alan şiddeti (**E**) orantılıdır ve bu oran;

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (4-27)$$

Şeklinde verilir. Burada σ birimi **siemens/metre** olan malzemenin iletkenliğidir. 1 siemens 1 amper/volt`dur. Bu **Ohm Yasası**`nın en genel halidir. Tabloda değişik malzemelerin iletkenliği gösterilmiştir. Ohm yasasını her zaman uygulamak mümkün değildir. Mesela seramik yarı-iletkenler gibi bazı tiplerde akım yoğunluğu elektrik alanın 5. Kuvveti ile orantılıdır. Ayrıca bazı iletkenlerde izotop değildir.

Tabloda bazı iletkenlerin iletkenlikleri verilmiştir.

Conductor	Conductivity σ , siemens/meter
Aluminium	3.54×10^7
Brass (65.8 Cu, 34.2 Zn)	1.59×10^7
Chromium	3.8×10^7
Copper	5.80×10^7
Gold	4.50×10^7
Graphite	7.1×10^4
Iron	1.0×10^7
Mumetal (75 Ni, 2 Cr, 5 Cu, 18 Fe)	0.16×10^7
Nickel	1.3×10^7
Seawater	~ 5
Silver	6.15×10^7
Tin	0.870×10^7
Zinc	1.86×10^7

3.4.1 DİRENÇ

Eğer iletken Ohm Yasası geçerli ise iki elektrot arası **Direnç**;

$$R = \frac{V}{I}, \quad (4-28)$$

Şeklinde tanımlanır. Burada V elektrotlar arası potansiyel / ` da akımdır.

ÖRNEK

Şekil (a)'daki gibi A kesitinde ve L uzunluğunda bir iletkeni ele alalım:

$$I = AJ = A\sigma E = \frac{\sigma AV}{L}, \quad (4-29)$$

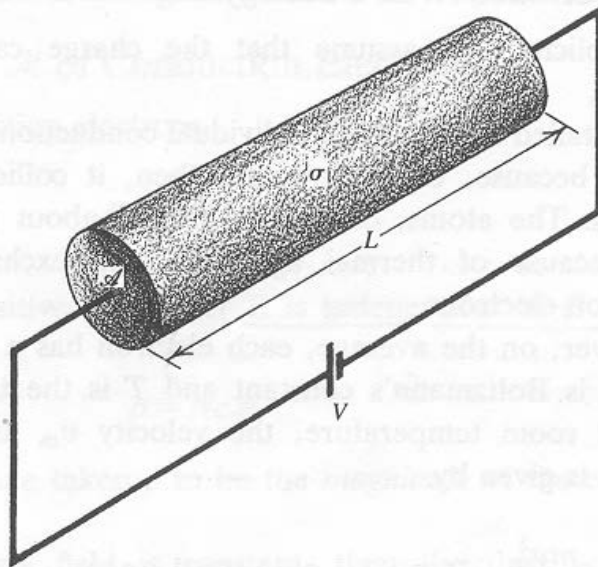
Bulunur. Buradan da;

$$R = \frac{L}{\sigma A}. \quad (4-30)$$

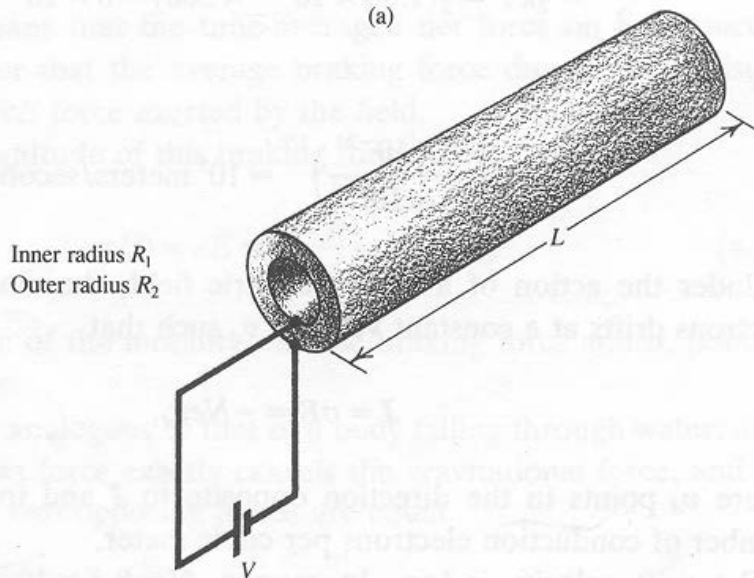
Elde edilir. Şimdide şekil (b)'deki gibi iç ve dış yarıçapları R_1 ve R_2 olan bir tübü inceleyelim. İletken içinde elektrik alanı düzgün olsun. dr kalınlığındaki kalınlığın direnci $dr/\sigma 2\pi rL$ dir. Sonuçta toplam direnç

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sigma 2\pi rL} = \frac{1}{2\pi\sigma L} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4-31)$$

Bulunur.



(a)



Inner radius R_1
Outer radius R_2

3.4.2 STATİK ALAN İÇİNDE İLETKENLİK

Basitlik olsun diye yük taşıyıcılarının iletkenlik elektronu olduğunu kabul edelim. Herbir elektronun hareketinin detaylı analizi hala zordur. Termal etki ve diğer elektronlarla enerji alışverişi nedeni ile elektronlar kendi denge pozisyonlarında salınırlar. Bununla birlikte herbir elektronun ortalama kinetik enerjisi $3kT/2$ dir. Burada k **Boltzman sabiti**, T ise **Kelvin** cinsinden mutlak sıcaklıktır. Sonuç olarak termal etki nedeni ile oda sıcaklığında hız;

$$\frac{mv_{th}^2}{2} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23} \times 300) \approx 6 \times 10^{-21} \text{ joule}, \quad (4-32)$$

$$v_{th} \approx \left(\frac{12 \times 10^{-21}}{9.1 \times 10^{-31}} \right)^{1/2} \approx 10^5 \text{ meters/second}. \quad (4-33)$$

Bulunabilir. Statik alanın etkisi altında iletkenlik elektronu bulutu v_d hızında sürüklenir. Bu hız

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -Nev_d, \quad (4-34)$$

Formülünden hesaplanır. Burada sürüklenme hızı v_d $\mathbf{J}$ ve $\mathbf{E}$ 'ye zıt yöndedir. N ise 1 metre³ içindeki iletkenlik elektronu sayısıdır. Bakırda $N=8.5 \times 10^{28}$ dir. 1 mm² lik yüzeyden 1 A akım geçerse v_d yaklaşık olarak 10^{-4} metre/saniye yada 300 mm/saat olur.

3.4.3 İLETKENLİK

ELEKTRONLARININ MOBİLİTESİ

İletkenlik elektronlarının mobilitesi

$$\mathcal{M} = \frac{|v_d|}{E} = \frac{\sigma}{Ne} \quad (4-36)$$

Şeklinde tanımlanır ve pozitif bir değerdir. Lineer iletkenlerde bu değer E 'den bağımsızdır. Sonuç olarak;

$$\sigma = Ne\mathcal{M} \quad (4-37)$$

Şeklindedir. Eğer sürücü elektrik alan sabit ise sürüklenme hızı da sabittir. Bunun anlamı iletkenlik elektronuna etkiyen zaman üzerinden ortalama net kuvvet sıfırdır veya çarpışma nedeni ile doğan frenleme kuvveti alan tarafından gelen $-eE$ kuvvetini yok eder. Buradan mobilitayı bulabiliriz.

$$-(-eE) = eE = \frac{e|v_d|}{\mathcal{M}} = -\frac{e}{\mathcal{M}}v_d, \quad (4-38)$$

İyi iletken (gc) ve yarı-iletken için N , $\mathcal{M}$ ve σ değerleri kıyaslanmıştır

$$N_{gc} \gg N_{sc}, \quad \sigma_{gc} \gg \sigma_{sc}, \quad \mathcal{M}_{gc} \ll \mathcal{M}_{sc}. \quad (4-39)$$

3.4.4 ALTERNATİF ALAN İÇİNDE İLETKENLİK

Termal etkiyi ihmal edersek iletkenlik elektronları üzerine iki kuvvet etki eder. Bunlar sürücü kuvvet (eE) ve frenleme kuvvetidir (Denklem 4.38). Alternatif alan içinde bu iki kuvvet eşit değildir ve hareket denklemi:

$$m^* \frac{dv_d}{dt} = -eE_m \exp j\omega t - \frac{e}{\mathcal{M}} v_d, \quad (4-40)$$

Burada m^* efektif küttedir. Bu değer de çarpışmalar içerilmektedir. Kural gereği izole elektronun kütlelerinden daha küçüktür. Mesela bu silikondan $m^*=0.97m$ gallium arsenid`de (GaAs) $m^*=0.07m$. Türev yerine $j\omega$ yazarsak;

$$v_d = -\frac{\mathcal{M}}{1 + j\omega m^* \mathcal{M}/e} E_m \exp j\omega t. \quad (4-41)$$

Fakat $J = \sigma E = -Ne v_d$ dir. Bunu

$$\sigma = \frac{Ne\mathcal{M}}{1 + j\omega m^* \mathcal{M}/e}. \quad (4-42)$$

$w=0$ yazarsak 4.37 denklemini elde edebiliriz. 4.42 denklemini atomik olayların hakim olduğu 1 GHz ve üzeri frekanslarda kullanılamaz. Oda sıcaklığında bakır için:

$$\frac{\omega m^* \mathcal{M}}{e} \approx \frac{\omega m \sigma}{Ne^2} \quad (4-43)$$

$$\approx \frac{2\pi f \times 9.1 \times 10^{-31} \times 5.8 \times 10^7}{8.5 \times 10^{28} \times (1.6 \times 10^{-19})^2} \quad (4-44)$$

$$\approx 1.5 \times 10^{-13} f. \quad (4-45)$$

4.42 denkleminin imajiner kısmı $f \ll 7 \times 10^{12}$ için ihmal edilebilir. 1 GHz`ye kadar iletkenlik elektronu bulutu **E** fazında hareket eder ve $\sigma = Ne\mathcal{M}$ dir. Çok düşük sıcaklıklarda saf metallerin iletkenliği kompleksdir ve

$$\sigma = -j \frac{Ne^2}{m^* \omega} \quad (4-46)$$

3.4.5 İLETKENLİK İÇİNDE HACİMSEL YÜK YOĞUNLUĞU

- (1) Sürekli hali ve homojen iletkeni düşünelim. Sonuçta Bölüm 3.3`den  $\partial\rho/\partial t=0$  ve  $\nabla \cdot \mathbf{J}=0$  dir. Eger  $\mathbf{J}$  Ohm yasası ( $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ )`na uyan homojen iletken içindeki akım yoğunluğu ise

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (4-47)$$

Fakat Bölüm 2.7`den hatırlanırsa  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  hacimsel yük yoğunluğu ( $\rho$ ) ile orantılı idi. Sonuç olarak sürekli halde homojen iletken içinde ( $\sigma$  koordinattan bağımsız)  $\rho=0$ `dır. Kural olarak akım taşıyan iletkende yüzeysel yük yoğunluğu **sıfır** değildir.

- (2) Şimdi iletken içine elektronları bombardıman ederek yük enjekte ettiğimizi düşünelim. Bu durumda yük yoğunluğu ne olur? Bölüm 3.3`den

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4-48)$$

Fakat Bölüm 2.7`den

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (4-49)$$

Burada ϵ_r malzemenin bağıl geçirgenliğidir. Buradan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma \rho}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\epsilon_r \epsilon_0}\right), \quad (4-50)$$

olduğu ve ρ 'nin zamanla eksponasiyel olarak düştüğü görülür. İyi iletkenlerde ϵ_r ölçülemez çünkü iletkenlik polarizasyonu gölgede bırakır. t 'nin katsayısının tersine **rahatlama zamanı** denir. İyi iletkenlerde rahatlama zamanı çok küçüktür ve pratikte ρ sıfır kabul edilebilir. Mesela oda sıcaklığındaki bakır için rahatlama zamanı pratikte 4×10^{-11} teoride ise yaklaşık olarak 10^{-19} 'dur. Bunun sebebi σ 'nında frekansa ve sonuçta rahatlama zamanına bağımlı olmasıdır.

- (3) Alternatif akım taşıyan homojen iletken de denklem 4.47 uygulanabilir ve $\rho=0$ 'dır.
(4) Akım taşıyan homojen olmayan iletken de $\rho=0$ değildir. Mesela sürekli haleden

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = (\nabla \sigma) \cdot \mathbf{E} + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4-51)$$

ve

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} = -\frac{(\nabla \sigma) \cdot \mathbf{E}}{\sigma}. \quad (4-52)$$

- (5) Eğer yükler üzerinde manyetik kuvvet de etkiliyse $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ kuralı uygulanamaz ve hacimsel yük yoğunluğu mevcuttur.

3.4.6 JOULE ETKİSİ

Elektrik alanın yokluğunda iletkenlik elektronu bulutu iletken çatısı içersinde termal dengede bulunur. Elektrik alanın uygulanması ile çarpışmalar arasında elektronlar kinetik enerji kazanır ve bu extra enerjiyi yapı ile paylaşır. Sonuçta iletken ısınır. Buna Elektrik alanın yokluğunda iletkenlik elektronu bulutu iletken çatısı içersinde termal **Joule Etkisi** denir. İletkenlik elektronu tarafından kazanılan enerjiyi bulmak için bir kenarı a olan bir iletken küp düşünelim. İki zıt kenarına V gerilimini uyguladığımızda akan akım I 'dır. Sonuçta kazanılan kinetik enerji VI olur ve birim kübü ısıtmak için harcanan güç;

$$P' = \frac{VI}{a^3} = \left(\frac{V}{a}\right)\left(\frac{I}{a^2}\right) = EJ \quad (4-53)$$

$$= \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} \quad \text{watts/meter}^3. \quad (4-54)$$

Eğer hem E hemde J zamanın sinizoidal fonksiyonu iseler

$$P'_{av} = E_{rms} J_{rms} = \sigma E_{rms}^2 = \frac{J_{rms}^2}{\sigma}. \quad (4-55)$$

Elde edilir.

3.5 STATİK ALAN İÇİNDE İZOLE İLETKEN

Eğer homojen izole iletken yüklenirse iletkenlik elektronları denge pozisyonlarına gelinceye kadar hareket ederler ve sonuçta iletkenin içinde **E** alanı **sıfır** olur. Bunu

- İletken içindeki bütün noktalar aynı potansiyeldedir
- 4.47 denkleminde iletken içindeki hacimsel yük yoğunluğu sıfırdır
- Herhangi net statik yük iletkenin yüzeyinden bulunur
- **E** iletken yüzeyine diktir. Aksi halde yükler yüzey boyunda akması gerekirdi
- Yüzeyin hemen dışında $E = \sigma_{ch} / \epsilon_0$ 'dır. Burada σ_{ch} Gauss Yasasından yüzey yük yoğunluğudur.

4. ELEKTRİK ALANLAR III.

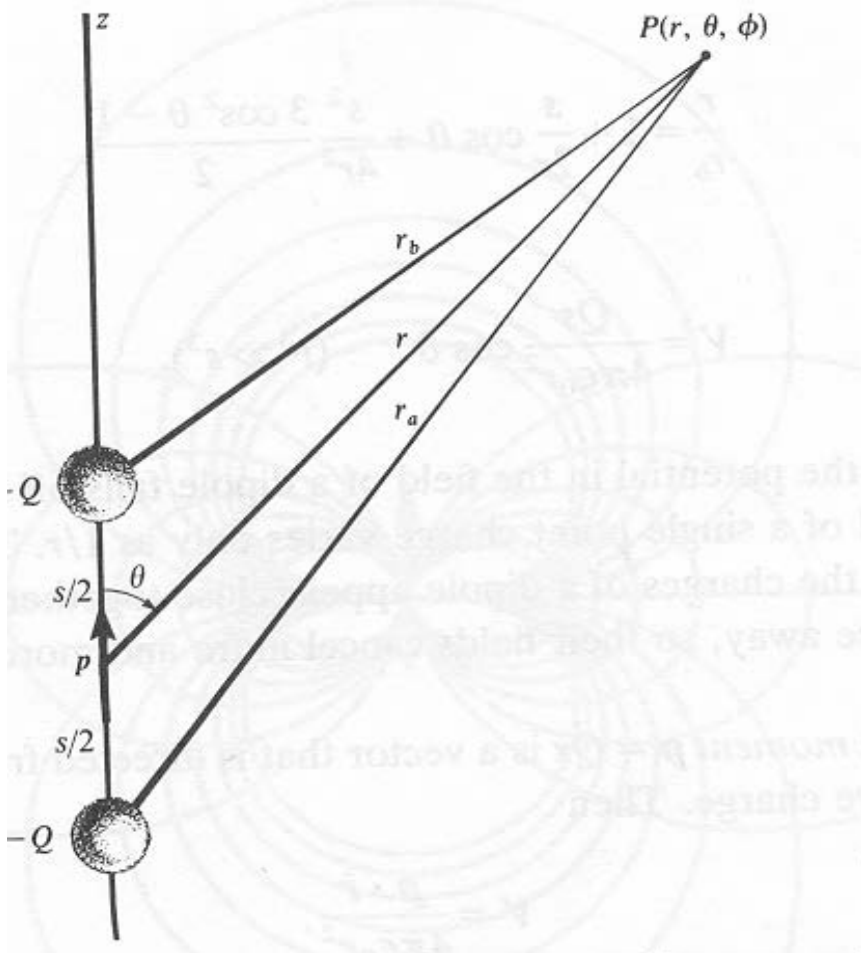
- Giriş
- Elektriksel Dipol
- Lineer Elektriksel Quadropol
- Elektriksel Çokuçlular (Multipoller)
- Yük Dağılımı Dışındaki Elektrik Alanın Multipol Terimleri Cinsinden Açılımı

4.1 GİRİŞ

Elektriksel çokuçlular belli bir simetriye sahip noktasal yükler kümesidir. Çokuçlularla ilgilenilmesinin sebebi anten gibi bazı cihazların elektrik alanlarının çok uçlular ile açıklanabilmesindendir.

Tek bir noktasal yük olan elektriksel tekuçlunun yanında diğer faydalı çokuçlu iki noktasal yükten oluşan dipodür. Birçok molekül dipoldür. Ayrıca birçok anten osilasyon yapan dipol gibi davranır.

4.2 ELEKTRİKSEL DİPOL



Elektriksel Dipol en çok rastlanan yük dağılımıdır. Aynı yükte biri pozitif diğeri negatif iki yükün birbirinden s kadar uzaklığa yerleştirilmesinden oluşur. Şekilde bir elektriksel dipol gösterilmiştir. $r \gg s$ olan P noktasının V ve $\mathbf{E}$ değerlerini bulmak isteyelim. P noktasının potansiyeli

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right), \quad (5-1)$$

Burada

$$r_a^2 = r^2 + \left(\frac{s}{2} \right)^2 + rs \cos \theta. \quad (5-2)$$

Şimdi her iki tarafı r^2 ile bölüp tersini alırsak

$$\frac{r}{r_a} = \left[1 + \left(\frac{s}{2r} \right)^2 + \frac{s}{r} \cos \theta \right]^{-1/2} \quad (5-3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s^2}{4r^2} + \frac{s}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{s^2}{4r^2} + \frac{s}{r} \cos \theta \right)^2 - \dots \quad (5-4)$$

Eğer $(s/r)^3$ ve üzeri terimleri ihmal edersek sonuçta;

$$\frac{r}{r_a} = 1 - \frac{s}{2r} \cos \theta + \frac{s^2}{4r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}. \quad (5-5)$$

Benzer şekilde

$$\frac{r}{r_b} = 1 + \frac{s}{2r} \cos \theta + \frac{s^2}{4r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (5-6)$$

ve

$$V = \frac{Qs}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (r^3 \gg s^3). \quad (5-7)$$

Dikkat edilirse tek bir noktasal yükün potansiyeli $1/r$ ile değişirken dipolün potansiyeli $1/r^2$ ile değişir. **Dipol Momenti** yönü negatif yükten pozitif yüke doğru ve değeride $\mathbf{p}=Q\mathbf{s}$ olan bir vektör olarak tanımlanırsa

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (5-8)$$

Şeklinde tanımlanabilir. **E** elektrik anal şiddeti bulunmak istenirse küresel koordinat sisteminde

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (5-9)$$

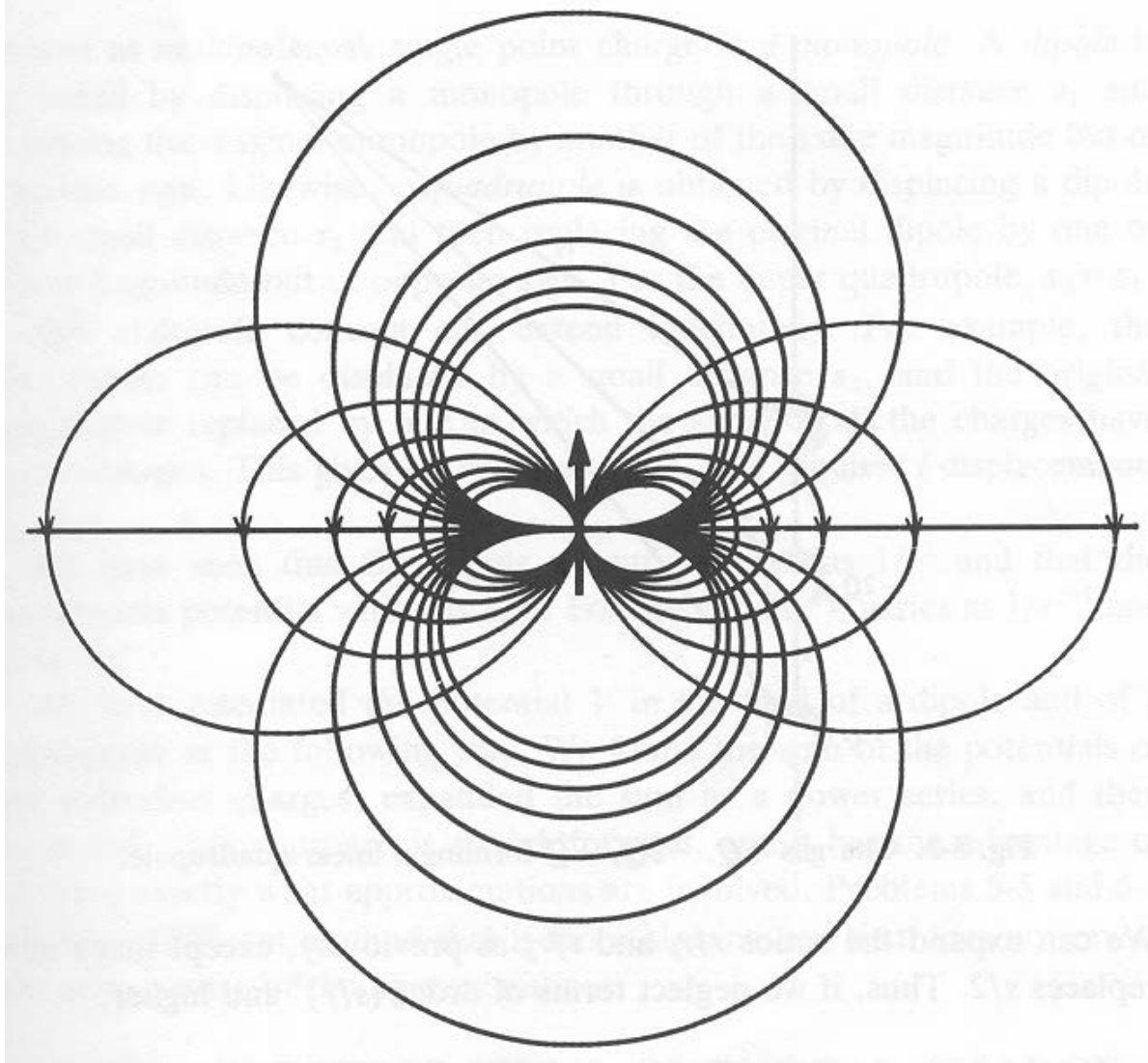
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (5-10)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (5-11)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (5-12)$$

Dikkat edilirse **E** r^3 ile düşer.

Aşağıdaki şekilde elektriksel dipolün **E** çizgileri ve eşpotansiyel yüzeyleri gösterilmiştir.



En genel halde bir yük dağılımının **dipol moment**

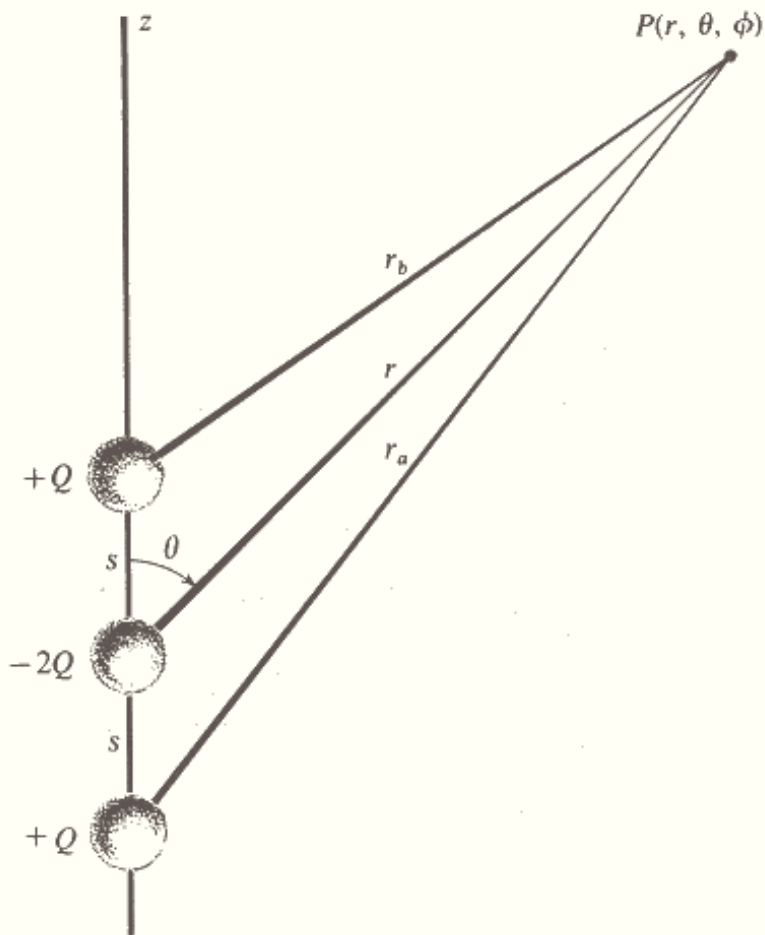
$$\mathbf{p} = \int_{v'} \mathbf{r}' \rho dv' = Q \frac{\int_{v'} \mathbf{r}' \rho dv'}{\int_{v'} \rho dv'} = Q \bar{\mathbf{r}}', \quad (5-13)$$

Şeklinde tanımlanır. Burada Q v' hacmini işgal eden net toplam yüküdür ve $\mathbf{r}'$ yükün merkezinin pozisyonunu tanımlar.

Eğer $Q=0$ ve $\mathbf{r}' \rightarrow \infty$ ise $Q\mathbf{r}'$ tanımsızdır. Bununla birlikte $\mathbf{r}'\rho dv'$ hala $\mathbf{p}$ dipol momentini bulmada kullanılabilir ve dipol momenti orjinin seçiminden bağımsızdır.

Eğer $Q \neq 0$ ise yük dağılımının dipol momenti orijin yükün merkezinde ise **sıfır**'dır

4.3 LİNEER ELEKTRİKSEL QUADROPOL



Lineer elektriksel quadropol şekilde de görülebileceği gibi birbirlerinden s kadar uzaklıkta bulunan ve değerleri $+Q$, $-2Q$ ve $+Q$ olan 3 adet noktasal yükten oluşur. $r \gg s$ olan P noktasının potansiyeli

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_a} - \frac{2Q}{r} + \frac{Q}{r_b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} - 2 \right). \quad (5-14)$$

Bir önceki bölümde bulduğumuz r/r_a ve r/r_b açılımlarında s yerine $s/2$ yazarsak ve $(s/r)^3$ ve üzeri terimleri ihmal edersek

$$\frac{r}{r_a} = 1 - \frac{s}{r} \cos \theta + \frac{s^2}{r^2} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2}, \quad (5-15)$$

$$\frac{r}{r_b} = 1 + \frac{s}{r} \cos \theta + \frac{s^2}{r^2} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2}, \quad (5-16)$$

$$V = \frac{2Qs^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \quad (r^3 \gg s^3). \quad (5-17)$$

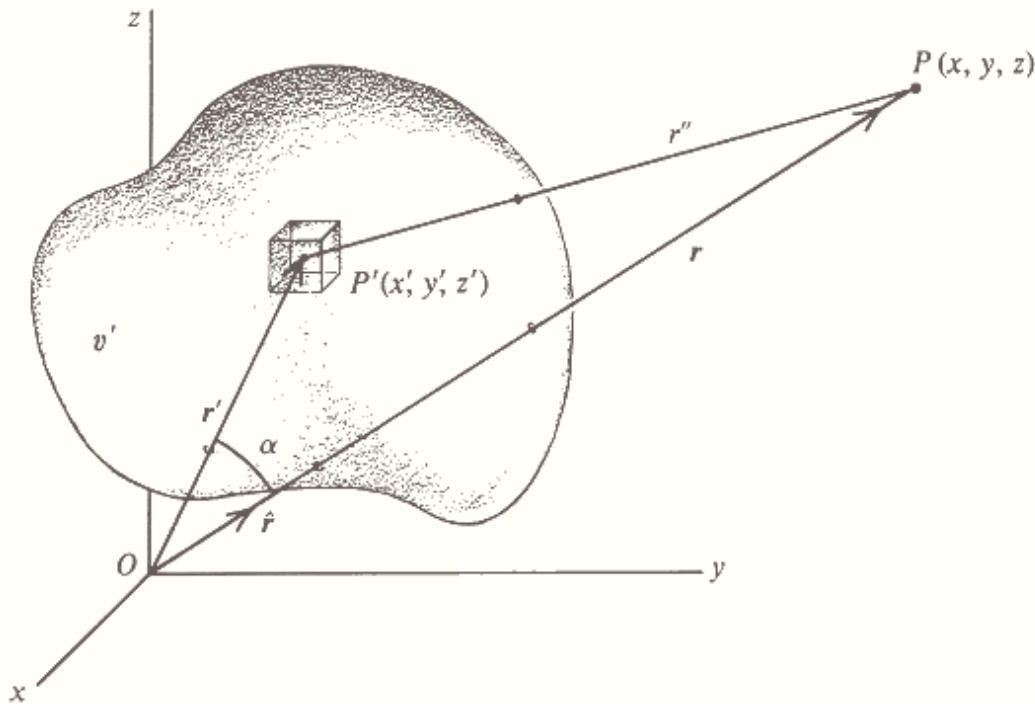
Lineer elektriksel kuantropol şeklinde de görülebileceği gibi birbirlerinden s kadar uzaklıkta bulunan ve değerleri $+Q$, $-2Q$ ve $+Q$ olan 3 adet noktasal yükten oluşur. $r \gg s$ olan P noktasının potansiyeli

4.4 ELEKTRİKSEL ÇOKUÇLULAR

Dipol ve quadrupol kavramlarını daha büyük pozitif ve negatif yük sayıları için genişletmek mümkündür. Bu tür yük arajmanlarına **multipol (çokuçlu)** denir. Tek bir noktasal yük monopol (tekuçlu), iki tane eşit fakat farklı işarette iki tane yükün birbirlerinden s kadar uzaklığa konulmasında dipol denir.

Çokuçlu kavramı sonsuza kadar genişletilebilir. Bir önceki bölümlerde gördük ki dipolün potansiyeli $1/r^2$, quadrupolün potansiyeli ise $1/r^3$ ile değişir. 2^l uçlu için potansiyel $1/r^{l+1}$ ve elektrik alanı $1/r^{l+2}$ ile değişir.

4.5 YÜK DAĞILIMINUN DIŞINDAKİ ELEKTRİK ALANIN ÇOKUÇLU TERİMLERİ CİNSİNDEN AÇILIMI



Şekildeki gibi yük yoğunluğu $\rho(x', y', z')$ olan, v' hacmini kaplayan ve tesadüfi seçilen orijinden max uzaklığı r'_{max} olan bir yükü ele alalım. $r > r'_{max}$ olan dışardaki bir P noktasının potansiyeli

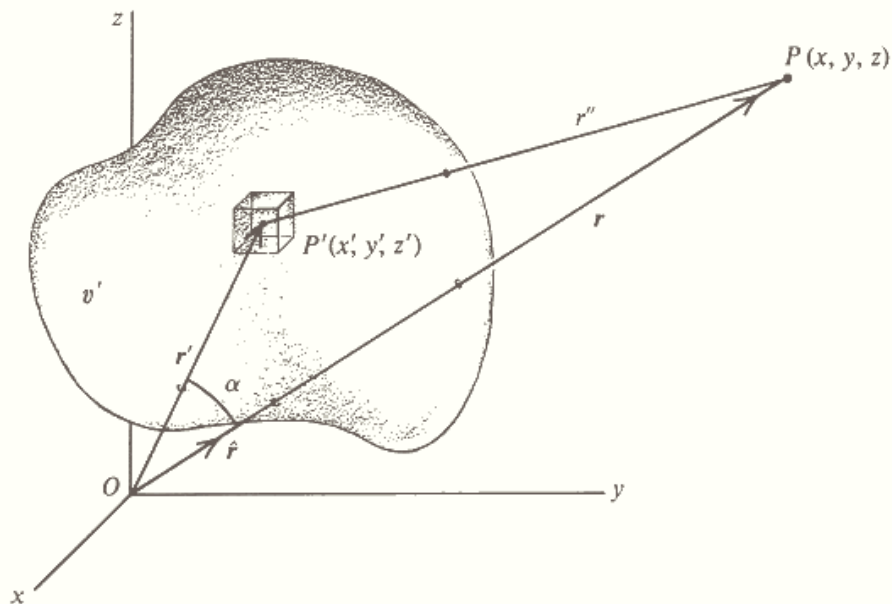
- (1) Aynı net yüke sahip bir monopolün V_1 potansiyeline **artı**
- (2) Aynı dipol momentine sahip bir dipolün V_2 potansiyeline **artı**
- (3) Aynı quadrupol momentine sahip bir quadrupolün V_3 potansiyeline **artı**
- eşittir.

Benzer durum P noktasının elektrik alanının bulunmasındada kullanılabilir.

Eğer $Q=0$ ise V_2 orjinin seçiminden bağımsızdır. Daha genel ifade ile eğer 2^{l+1} kutuplunun multipol momenti sıfır ise V_l orjinin seçiminden bağımsızdır.

Monopol potansiyeli $1/r$ ile dipol potansiyeli $1/r_2$ quadropolun potansiyeli $1/r_3$ ile değiştiğinden $r \gg r'_{max}$ olan bir noktasında bir yük dağılımının potansiyeli $V \approx V_1$ biraz yakın ise $V \approx V_1 + V_2$ biraz daha yakın ise $V \approx V_1 + V_2 + V_3 + \dots$ şeklinde bulunur.

4.5.1 V 'NİN DEĞERİ: LAGANDRE POLİNOMLARI



Şekildeki gibi $r > r'_{max}$ olan P noktasının potansiyeli

$$V = \int_{v'} \frac{\rho dv'}{4\pi\epsilon_0 r''}, \quad (5-18)$$

Burada

$$r'' = |r - r'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}. \quad (5-19)$$

$P(x, y, z)$ değişmezdir. Böylece r'' x', y', z' 'nün fonksiyonudur ve $1/r''$ 'nü orjin civarında **Taylor Serisi** 'ne açabiliriz. Diyelimki

$$w(u) = \frac{1}{|ur' - r|}. \quad (5-20)$$

Olsun.

u faktörü boyutsuzdur. Bize $1/r''$ olan $w(1)$ gereklidir.

$$w(1) = \frac{1}{r''} = w(0) + \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)_{u=0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \right)_{u=0} + \dots, \quad (5-21)$$

Burada $w(0) = 1/r$ 'dir. Sağ taraftaki türevleri hesaplayabilmek için u 'ya göre $|ur' - r|$ 'nin kısmi türevleri gereklidir.

$$\frac{\partial}{\partial u} |ur' - r| = \frac{\partial}{\partial u} [(ux' - x)^2 + (uy' - y)^2 + (uz' - z)^2]^{1/2} \quad (5-22)$$

$$= \frac{1}{2 |ur' - r|} (2ux'^2 - 2x'x + 2uy'^2 - 2y'y + 2uz'^2 - 2z'z) \quad (5-23)$$

$$= \frac{ur'^2 - r' \cdot r}{|ur' - r|} = \frac{(ur' - r) \cdot r'}{|ur' - r|^3}. \quad (5-24)$$

Böylece

$$\frac{\partial w}{\partial u} = - \frac{1}{|ur' - r|^2} \frac{(ur' - r) \cdot r'}{|ur' - r|} = - \frac{(ur' - r) \cdot r'}{|ur' - r|^3} \quad (5-25)$$

ve

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} = \frac{r' \cos \alpha}{r^2}, \quad (5-26)$$

Burada $\mathbf{r}^{\wedge}$ ve α şekildeki gibidir. Ayrıca

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{3[(u\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}']^2}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^5} - \frac{r'^2}{|u\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \quad (5-27)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\right)_{u=0} = \frac{3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} = \frac{r'^2(3 \cos^2 \alpha - 1)}{r^3}. \quad (5-28)$$

Genelde

$$\left(\frac{\partial^n w}{\partial u^n}\right)_{u=0} = \frac{r'^n}{r^{n+1}} n! P_n(\cos \alpha), \quad (5-29)$$

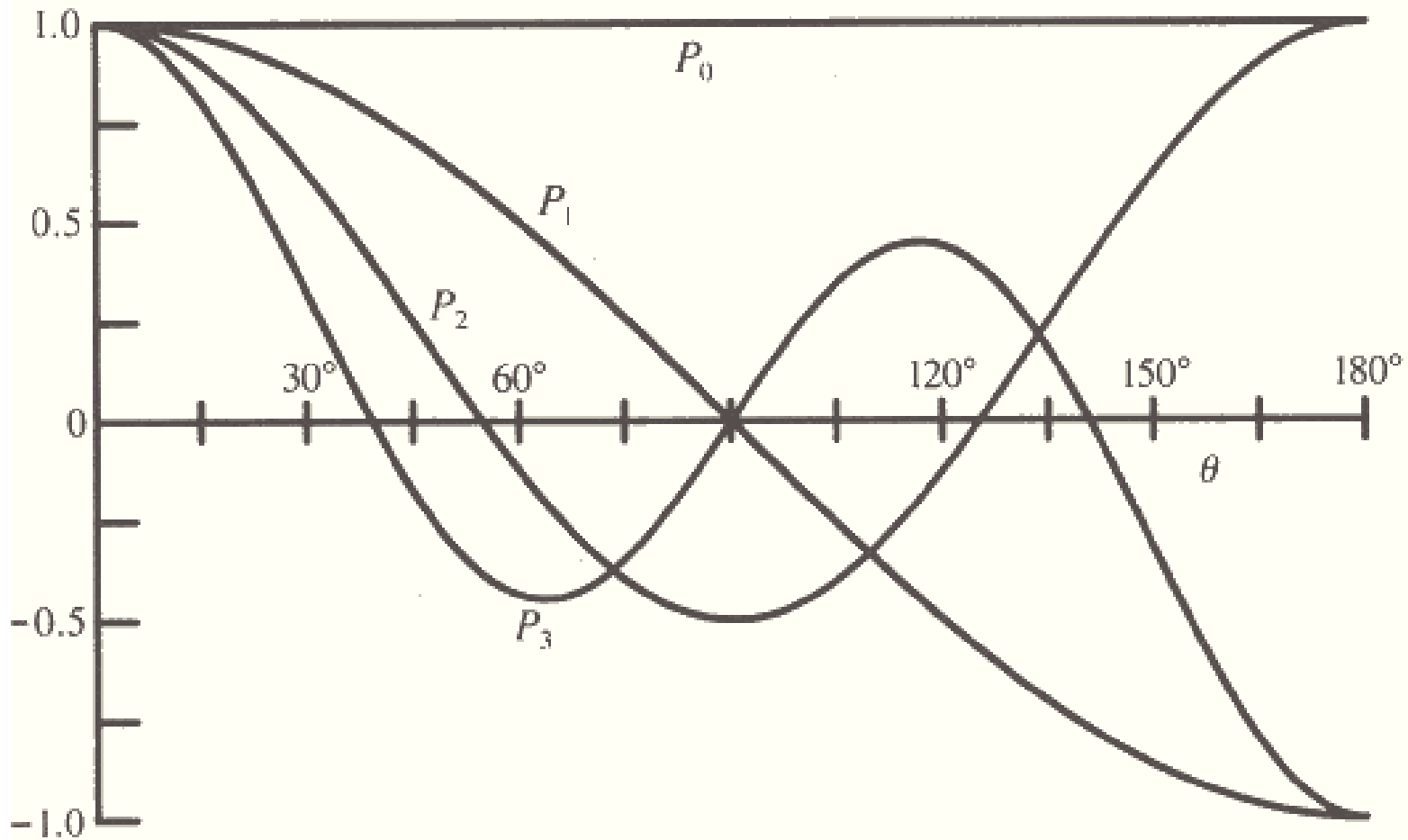
Burada

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \alpha)^n} (\cos^2 \alpha - 1)^n \quad (5-30)$$

Denklem 5.30`a **Lagandre Polinomu** denir. Tabloda ilk 5 terimi gösterilmiştir.

n	$P_n(\cos \alpha)$
0	1
1	$\cos \alpha$
2	$\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2}$
3	$\frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2}$
4	$\frac{35 \cos^4 \alpha - 30 \cos^2 \alpha + 3}{8}$
5	$\frac{63 \cos^5 \alpha - 70 \cos^3 \alpha + 15 \cos \alpha}{8}$

Aşağıdaki şekilde ilk dört Lagandre Polinomunu ($P_n(\cos\alpha)$) gösterilmiştir.



Herhangi α değeri için;

$$|P_n(\cos \alpha)| \leq 1. \quad (5-31)$$

Sonuç olarak 5.21 denkleminde

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{r} + \frac{r' \cos \alpha}{r^2} + \frac{r'^2(3 \cos^2 \alpha - 1)}{2r^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} r'^n P_n(\cos \alpha). \quad (5-32)$$

5.31 denklemi gereği bu seriler $r'_{max} < r$ için yakınsar. 5.18 denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{v'} \rho dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{v'} r' \cos \alpha \rho dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{v'} r'^2 \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \rho dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^4} \int_{v'} r'^3 \frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2} \rho dv' \end{aligned} \quad (5-33)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \int_{v'} r'^4 \frac{35 \cos^4 \alpha - 30 \cos^2 \alpha + 3}{8} \rho dv' + \dots \\ &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + \dots \end{aligned} \quad (5-34)$$

Şimdi ilk 3 terimi inceleyelim

4.5.2 MONOPOL TERİMİ

İlk terim bütün yüklerin orjinde konsantre olduğu bir yükün P noktasındaki V potansiyeline eşittir.

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (5-35)$$

Burada Q net yük dağılımıdır. Bu monopol terimidir. Eğer net yük **sıfır** ise bu terim sıfırdır. Bu değer orjinin pozisyonuna bağlıdır.

4.5.3 DİPOL TERİMİ

Denklem 5.33`den de görülebileceği gibi ikinci terim dipol gibi $1/r^2$ ile değişir.

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{v'} \mathbf{r}' \cos \alpha \rho dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \int_{v'} \mathbf{r}' \rho dv', \quad (5-36)$$

Burada sağ taraftaki ikinci terim yük dağılımının dipol momentidir.

$$\mathbf{p} = \int_{v'} \mathbf{r}' \rho dv'. \quad (5-37)$$

Böylece Denklem 5.8 deki gibi

$$V_2 = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (5-38)$$

Bulunur.

4.5.4 QUADRUPOL TERİMİ

Denklem 5.33`deki  $V_3$  terimini inceleyelim. Bölüm 5.3`deki quadrupolün potansiyeli gib $1/r^3$ terimi içerir. Eger yükleri Q , $-2Q$ ve Q olan ve $z=s$, 0 ve $z=-s$ `e yerleştirilen quadrupolün potansiyelini hesaplırsak  $V_3$  Denklem 5.17`deki V `ye eşit olur. Şimdi

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{v'} \frac{1}{2} r'^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) \rho dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{v'} \frac{1}{2} [3(\hat{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2] \rho dv'. \end{aligned} \quad (5-39)$$

Diyelim ki

$$\hat{r} = l\hat{x} + m\hat{y} + n\hat{z}, \quad (5-40)$$

Olsun. Burada l, m, n $\mathbf{r}^{\wedge}$ `in yönlü kosinüsleridir. Açar ve gruplandırırız

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3mn \int_{v'} y'z' \rho dv' + 3nl \int_{v'} z'x' \rho dv' \right. \\ &\quad + 3lm \int_{v'} x'y' \rho dv' + \frac{3l^2 - 1}{2} \int_{v'} x'^2 \rho dv' \\ &\quad \left. + \frac{3m^2 - 1}{2} \int_{v'} y'^2 \rho dv' + \frac{3n^2 - 1}{2} \int_{v'} z'^2 \rho dv' \right). \end{aligned} \quad (5-42)$$

Bu integralleri Denklem 5.37`deki gibi sadece v' içindeki yük dağılımına bağlıdır ve P noktasının x,y,z koordinatlarına bağlı değildir. Bunlar yük dağılımının quadropol momentinin dokuz bileşenini tanımlar

$$p_{xx} = \int_{v'} x'^2 \rho dv' = Q \overline{x'^2}, \quad (5-43) \quad p_{yz} = p_{zy} = \int_{v'} y' z' \rho dv' = Q \overline{y' z'}, \quad (5-46)$$

$$p_{yy} = \int_{v'} y'^2 \rho dv' = Q \overline{y'^2}, \quad (5-44) \quad p_{zx} = p_{xz} = \int_{v'} z' x' \rho dv' = Q \overline{z' x'}, \quad (5-47)$$

$$p_{zz} = \int_{v'} z'^2 \rho dv' = Q \overline{z'^2}, \quad (5-45) \quad p_{xy} = p_{yx} = \int_{v'} x' y' \rho dv' = Q \overline{x' y'}. \quad (5-48)$$

Üst çizgi her zaman olduğu gibi ortalama değeri ifade eder. Sonuç olarak

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3mnp_{yz} + 3nlp_{zx} + 3lmp_{xy} + \frac{3l^2 - 1}{2} p_{xx} + \frac{3m^2 - 1}{2} p_{yy} + \frac{3n^2 - 1}{2} p_{zz} \right) \quad (5-49)$$

Eğer yükler z -ekseni civarında dairesel simetri gösterir ise

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0, \quad p_{xx} = p_{yy}. \quad (5-50)$$

Boylece tek bir büyüklük tanımlamak uygundur.

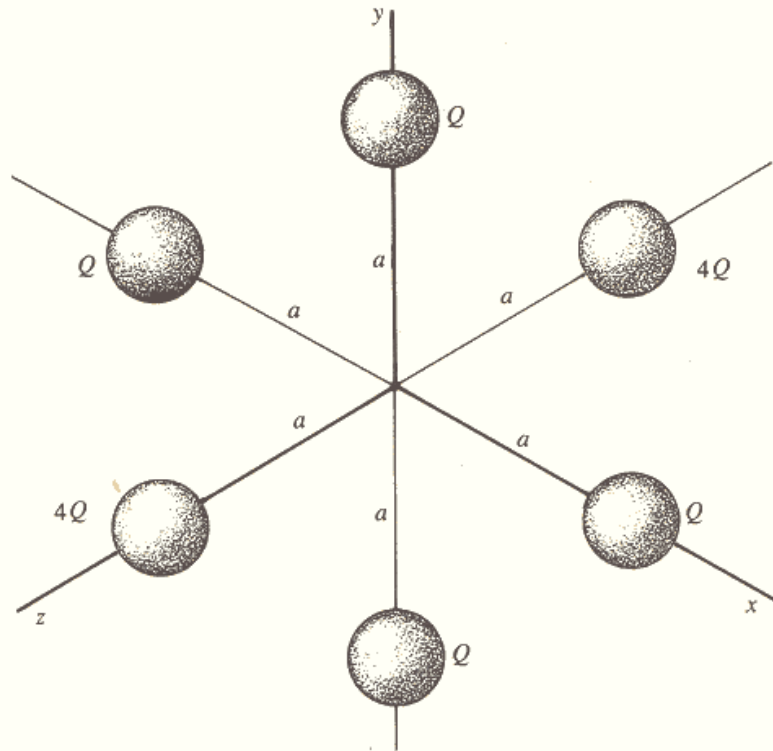
$$Q = 2(p_{zz} - p_{xx}) \quad (5-51)$$

Buna yük dağılımının **Quadrupol Momenti** denir. Eger $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ olduğu hatırlanırsa küresel koordinat sisteminde

$$V_3 = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3n^2 - 1) = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (5-52)$$

Buradan da 3.13 denkleminde elektrik alan bulunabilir.

ÖRNEK: ALTI YÜK DAĞILIMININ POTANSİYELİ



Şekilde 6 noktasal yük görülmektedir. Orjinden $r > a$ mesafesindeki bir P noktasını düşünelim. P noktasının potansiyeli 5.34 denklemindeki gibidir. Eğer ilk üç terim hesaplanmak istenirse: 5.35 denkleminden

$$V_1 = \frac{12Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5-53)$$

Bulunur. 5.37 ve 5.38 denklemlerinden

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{r}' Q = 0, \quad V_2 = 0. \quad (5-54)$$

Elde edilir. Denklemler 5.43-5.48`den

$$p_{xx} = 2a^2 Q, \quad p_{yy} = 2a^2 Q, \quad p_{zz} = 8a^2 Q, \quad (5-55)$$

$$p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0. \quad (5-56)$$

Sonuç olarak 5.49 denkleminde

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [(3l^2 - 1)a^2Q + (3m^2 - 1)a^2Q + (3n^2 - 1)4a^2Q] \quad (5-57)$$

$$= \frac{a^2Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3l^2 + 3m^2 + 12n^2 - 6) \quad (5-58)$$

$$= \frac{a^2Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (9n^2 - 3) = \frac{3a^2Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3n^2 - 1), \quad (5-59)$$

ve

$$Q = 12a^2Q. \quad (5-60)$$

Tekrar $V_4=0$ 'dır. Son olarak

$$V_5 = \frac{Qa^4}{16\pi\epsilon_0 r^5} [35(l^4 + m^4 + 4n^4) - 90n^2 - 12]. \quad (5-61)$$

Sonuç olarak P noktasının potansiyeli

$$V = V_1 + V_3 + V_5 + \dots \quad (5-62)$$

$$= \frac{6Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ 1 + \frac{3n^2 - 1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{24} [35(l^4 + m^4 + 4n^4) - 90n^2 - 12] \frac{a^4}{r^4} + \dots \right\}. \quad (5-63)$$

Yön kosünüsleri l, m, n 'nın değerleri $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ olduğundan en fazla bir olabilir. $r \geq 10a$ olduğunda a^2/r^2 çok küçülür. Sonuç olarak $V_3, V_5, \dots$ Etkisi hemen hemen sıfırdır.

5. ELEKTRİK ALANLAR IV.

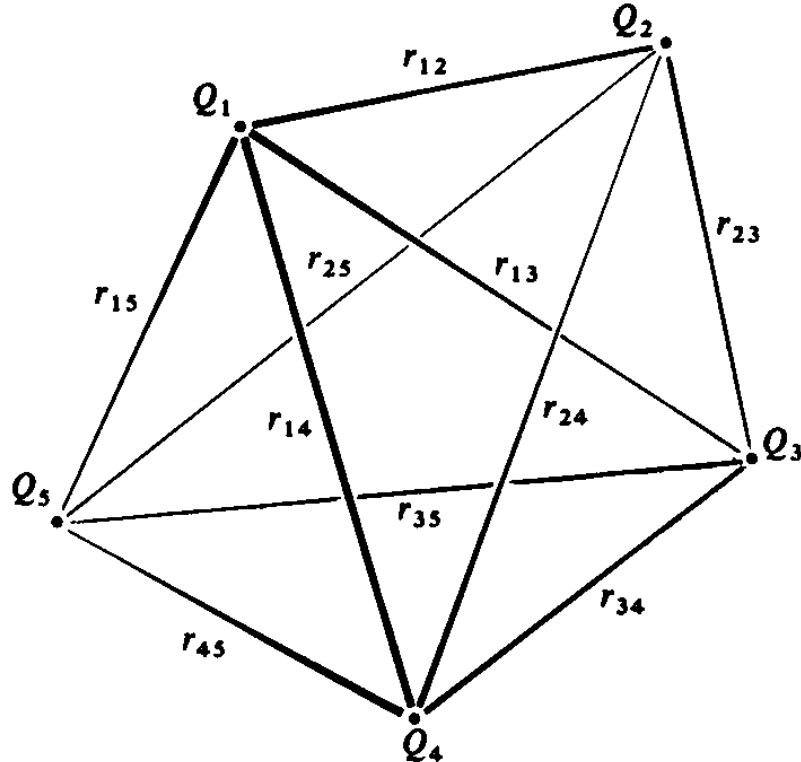
- Giriş
- Yük ve potansiyel terimleri cinsinden yük dağılımının potansiyel enerjisi (ξ)
- **E** terimi cinsinden yük dağılımının potansiyel enerjisi (ξ)
- İzole iletkenlerin kapasitesi
- İki iletken arası kapasite
- İletkenler üzerindeki elektriksel kuvvet
- Görsel çalışma metodu ile elektriksel kuvvetlerin hesabı

5.1 GİRİŞ

Bu bölüm elektrik alanda depolanan enerji ve yüklü iletkenlerin üzerindeki kuvvet hakkındadır. Kapasiteler elektrik enerjisini depolamak için kullanılan aletlerdir.

5.2 YÜK VE POTANSİYEL TERİMİ CİNSİNDEN YÜK DAĞILIMININ POTANSİYEL ENERJİSİ (ξ)

5.2.1 NOKTASAL YÜK SETİNİN POTANSİYEL ENERJİSİ



Uzayda şekildeki gibi N tane noktasal yükten oluşan noktasal yük dizisini düşünelim. Verilen bir yük diğer yüklerin oluşturduğu V potansiyeli olan bir noktada bulunur. Sonuç olarak bu yükün bir potansiyel enerjisi vardır ve negatif veya pozitif olabilir. Sisteminde bir potansiyel enerjisi vardır.

Diyelimki sistem elektriksel ve mekaniksel kuvvetlerin etkisi altında dengede olsun. Sistemin potansiyel enerjisi elektriksel yüklerin yükleri sonsuza yayma işleminde yaptığı işe eşittir.

İlk önce elektriksel ve mekaniksel kuvvetlerin dengesini bozmadan Q_1 yükünü yavaşça **sıfır hızda ve sıfır ivmede** sonsuza gönderelim. Diğer yükler yerlerinde sabittir.

Potansiyel enerjideki ξ_1 azalması Q_1 yükü ile V_1 potansiyelinin çarpımına eşittir. Yani

$$\xi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{1N}} \right). \quad (6-1)$$

Parantez içinde Q_1 hariç bütün yükler bulunur. Benzer şekilde aynı işlemi Q_2 yükünde yaparsak enerjideki azalma

$$\xi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{2N}} \right). \quad (6-2)$$

ξ_2 'de $N-2$ tane terim vardır. Bu işlemi bütün yüklerle uygularsak N . Yük yerinde kalır çünkü bütün yükler birbirlerinden çok uzaklara gönderilmişlerdir. Sonuç olarak orjinal yük dağılımının potansiyel enerjisi

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_N \quad (6-3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{1N}} \right) \\ &\quad + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + 0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{2N}} \right) \\ &\quad + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + 0 + 0 + \frac{Q_4}{r_{34}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{3N}} \right) + \dots \\ &\quad + \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0} (0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0). \end{aligned} \quad (6-4)$$

6.4 denklemini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E} = & \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{1N}} \right) \\
 & + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{21}} + 0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{2N}} \right) \\
 & + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{31}} + \frac{Q_2}{r_{32}} + 0 + \frac{Q_4}{r_{34}} + \dots + \frac{Q_N}{r_{3N}} \right) + \dots \\
 & + \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{N1}} + \frac{Q_2}{r_{N2}} + \frac{Q_3}{r_{N3}} + \frac{Q_4}{r_{N4}} + \dots + 0 \right). \quad (6-5)
 \end{aligned}$$

Sağdaki ilk terim Q_1V_1 ikinci terim Q_2V_2 ... Şeklindedir. Sonuç olarak

$$2\mathcal{E} = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + \dots + Q_NV_N, \quad (6-6)$$

ve

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_iV_i. \quad (6-7)$$

Verilen bir yük dağılımının dağılımını değiştirmek için gerekli olan enerji son potansiyel enerjinin ilk potansiyel enerjiden farkına eşittir.

5.2.2 SÜREKLİ YÜK DAĞILIMINI POTANSİYEL ENERJİSİ

Sürekli elektriksel yük dağılımı potansiyeli için $Q_i \rho dv$ ile ve toplam ise bütün yükleri çevreleyen hacim üzerinden integral ile değiştirilir:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V V \rho dv. \quad (6-8)$$

Bu integral elektriksel kuvvetler tarafından verilen yük dağılımını $\rho=0$ olan yere götürürken yaptığı işe veya negatif yüklerle pozitif yükleri birleştirmek için yapılan işe yada her ikisini gerçekleştirmek için yapılan işe eşittir.

İlk bakışta 6.8 denklemi 6.7 denkleminin açılımı gibi görülebilir. Fakat gerçekte değildir. Çünkü bu işe her bir mikroskobik yükleri birleştirmek için gerekli olan enerjiyi de içermektedir. Gerçekte Bölüm 5.3`den de görülebileceği gibi 6.8 denklemi her zaman pozitifdir.

Eğer ortam da yüzeysel yük yoğunluğu varsa depolanan enerji

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_A \sigma V dA, \quad (6-9)$$

Olur. Burada A bütün yükleri taşıyan yüzeydir.

5.3 E TERİMİ CİNSİNDEN YÜK DAĞILIMININ POTANSİYEL ENERJİSİ (ξ)

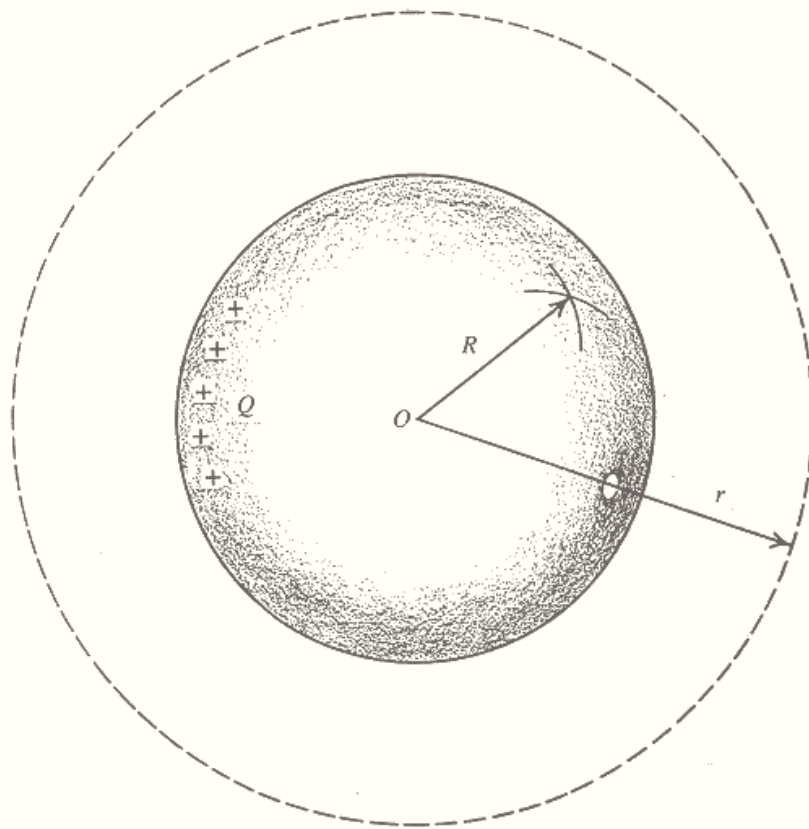
Bir önceki bölümde yük dağılımının potansiyel enerjisi (ξ) yük yoğunluğu (ρ) ve potansiyel (V) terimleri cinsinden verilmişti. Bilindiği gibi hem ρ hemde V $\mathbf{E}$ alakalıdır. Sonuç olarak enerji (ξ) $\mathbf{E}$ terimi cinsinden yazılabilir. Bu da;

$$\xi = \int_v \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv, \quad (6-11)$$

Burada v hacmi $\mathbf{E}$ 'nin bulunduğu bütün bölgelei içine alır. Sonuç olarak enerjiyi uzaydaki her bir noktaya elektriksel enerji yoğunluğu $\epsilon_0 E^2/2$ atayarak hesaplanabilir. Yukardaki 6.11 denklemi her zaman pozitif ve sonuçta da 6.8 denklemi her zaman pozitifdir.

Enerjinin hesaplanmasında hem 6.8 hemde 6.11 denklemi kullanılabilir Fakat farklı farklı vurgulama yaparlar. İlk denklem yükler sisteminin potansiyel enerjisini verirken ikinci denklem alanda depolanan enerjiyi verir.

ÖRNEK: YÜKLÜ İLETKEN KÜRENİN POTANSİYELİ



Q yükünü taşıyan ve R yarıçapındaki iletken kürenin potansiyel enerjisi ($\mathcal{E}$) üç farklı yolla hesaplanabilir.

(a) 1. Metod

Q yükü $Q/4\pi\epsilon_0 R$ potansiyelindedir. Sonuç olarak enerji

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (6-12)$$

(b) 2. Method

Yüklü kürenin yarıçapının yavaşça arttığını ve sonuçta sonsuz olduğunu düşünelim. Yükler tarafından yapılan iş başlangıçtaki potansiyel enerjiye eşittir.

Bu açılma sırasında dışardaki alan değişmeden kalır (Gauss Yasası). Bir yük elementi $\sigma d\mathcal{A} = \epsilon_0 E d\mathcal{A}$ değeri $E/2$ 'ye eşit olan (Bölüm 5.6) elektriksel kuvvetin etkisi altındadır ve bu element yarıçap dR kadar arttığı zaman yaptığı iş

$$d\mathcal{E} = (\epsilon_0 E d\mathcal{A}) \left(\frac{E}{2} \right) dR = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv, \quad (6-13)$$

Burada dv yüzey elementi $d\mathcal{A}$ tarafından süpürülen hacimsel elementtir. Yükler tarafından yapılan iş

$$\mathcal{E} = \int_R^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv = \int_R^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (6-14)$$

(c) 3. Metod

Diyelimki $\mathcal{A}(r)$ iletken küre ile konsantre ve dışında r yarıçapında herhangi bir yüzeydir. Gauss Yasası gereği (Bölüm 2.7)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}(r)} \epsilon_0 E d\mathcal{A} \int_R^{\infty} E dr. \quad (6-15)$$

İki integral birbirinden bağımsız olduğu için

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_R^{\infty} \left(\int_{\mathcal{A}(r)} \epsilon_0 E d\mathcal{A} \right) E dr \quad (6-16)$$

$$= \frac{1}{2} \int_R^{\infty} (4\pi r^2 \epsilon_0 E) E dr = \int_R^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr \quad (6-17)$$

$$= \int_R^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}, \quad (6-18)$$

5.4 İZOLE İLETKENİN KAPASİTESİ

Yükü Q olan ve diğer yüklerden çok uzakta sonlu bir ilekten düşünelim. Eger Q değişirse V de değişir. Bu değişim oranı (Q/V) sabittir. İzole bir ilektenin kapasitesi

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (6-19)$$

Şeklinde tanımlanır. Başka bir deyişle izole bir iletkenin kapasitesi potansiyelini 1 V arttırabilmek için gerekli olan extra yüke eşittir. Kapasitenin birimi **Farad** yada **Coulomb/Volt** dur. İzole iletkenin alanında depolanan enerji

$$\mathcal{E} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (6-20)$$

Kapasite sadece izole iletkenin büyüklüğüne ve şekline bağlıdır.

ÖRNEK: İLETKEN KÜRENİN KAPASİTESİ

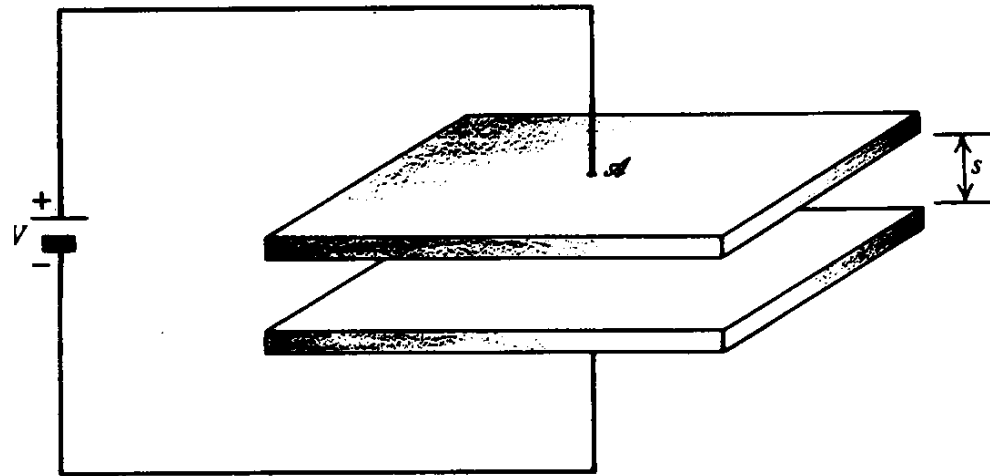
Eğer R yarıçapındaki iletken küre Q yükünü taşıyorsa potansiyeli $Q/4\pi\epsilon_0 R$ 'dir. Bu durumda kapasitesi

$$\begin{aligned} C &= 4\pi\epsilon_0 R = 1.11 \times 10^{-10} R \text{ farad} \\ &= 111 R \text{ picofarads.} \end{aligned} \quad (6-21)$$

5.5 İKİ İLETKEN ARASINDAKİ KAPASİTE

İki yüksüz izole iletken düşünelim. Q yükünün bir iletkeniden diğerine transferi aralarında V potansiyel farkını oluşturur. Tanım gereği kapasite Q/V 'dir. Kapasite sadece iletkenlerin geometrisine bağlıdır. Özellikle kapasite amacıyla oluşturulmuş iletkenlere **Kondansatör** denir.

ÖRNEK: PARALEL DÜZLEM KONDANSATÖR



Paralel düzlem kondansatör yüzey alanları A ve birbiri arası mesafe s olan iki düzlem iletken oluşur. Düzlemler Q ve $-Q$ yüklerini taşır. Köşe etkilerini ihmal edersek Gauss Yasası'ndan

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}, \quad V = \frac{Qs}{A\epsilon_0}. \quad (6-22)$$

Sonuçta

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{s}. \quad (6-23)$$

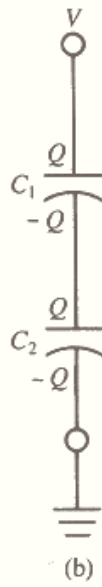
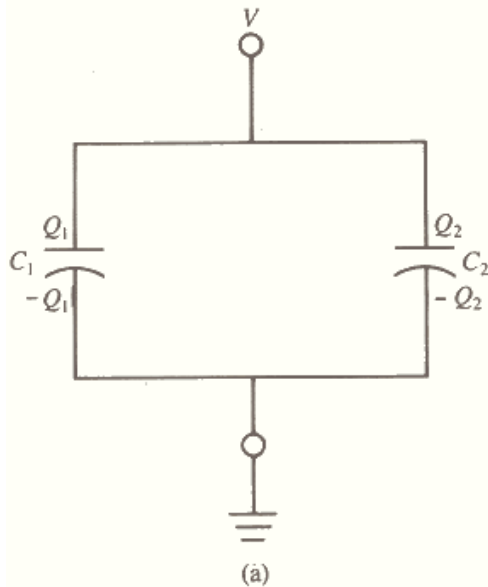
Ayrıca depolanan enerji

$$\mathcal{E} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 s}{2\epsilon_0 A}, \quad (6-24)$$

yada

$$\mathcal{E} = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 A} \right)^2 As = \frac{Q^2 s}{2\epsilon_0 A}. \quad (6-25)$$

ÖRNEK: KONDANSATÖRÜN PARALEL VE SERİ BAĞLANMALARI



Paralel bağlı kondansatörün gerilimleri aynıdır. Sonuç olarak Şekil (a) `daki gibi iki kondansatör için

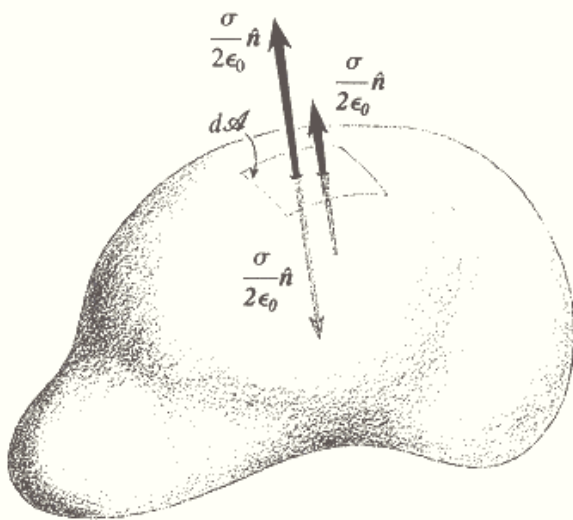
$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2. \quad (6-26)$$

Dır. Şekil (b) `deki gibi Seri bağlı kondansatörün yükleri aynıdır ve

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}, \quad (6-27)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (6-28)$$

5.6 İLETKENLER ÜZERİNDEKİ ELEKTRİKSEL KUVVET



σdA yük elementi diğer yüklerin elektrik alanı etkisi altındadır dolayısı ile elektriksel kuvvetin etkisi altındadır. Statik şartlar altında bu kuvvet yüzeye diktir aksi halede teğetsel elektrik alan ve teğetsel akım olurdu. Ayrıca bu kuvvet iletken üstünde tesire sahiptir.

Bu elektriksel kuvveti hesaplamak için yüzeyin yakınındaki elektrik alanı $\mathbf{E}$ ve yüzeysel yük yoğunluğu σ olşan bir iletken düşünelim. Gauss yasası gereği $E = \sigma / \epsilon_0$ dır. İlk bakışta σdA üzerine etkiyen kuvvetin $\mathbf{E}$ σdA olduğu düşünölebilir fakat σdA üzerine etkiyen alan diğör yüklerin oluşturduğu alan olması gerektiğinden bu yanlıştır.

σdA üzerindeki alanı Gauss yasasından hesaplamak mümkündür. Şekildende görölebileceğö gibi σdA dan ayrılan $\mathbf{E}$ akısı $\sigma dA / \epsilon_0$ dır ve yarışı içe yarısıda dışa doğrudur. Sonuç olarak σdA dıştaki bir noktanın alanının yarısını verir. İçerdeki alan ise diğör yüklerin oluşturduğu alan tarafından yok edilir.

Sonuç olarak $\sigma d\mathcal{A}$ ya etkiyen alan $\sigma/2\epsilon_0$ ve iletken üzerindeki $d\mathcal{A}$ elementine etkiyen kuvvet

$$dF = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sigma d\mathcal{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\mathcal{A}. \quad (6-29)$$

Ve yüzeysel kuvvet yoğunluğu

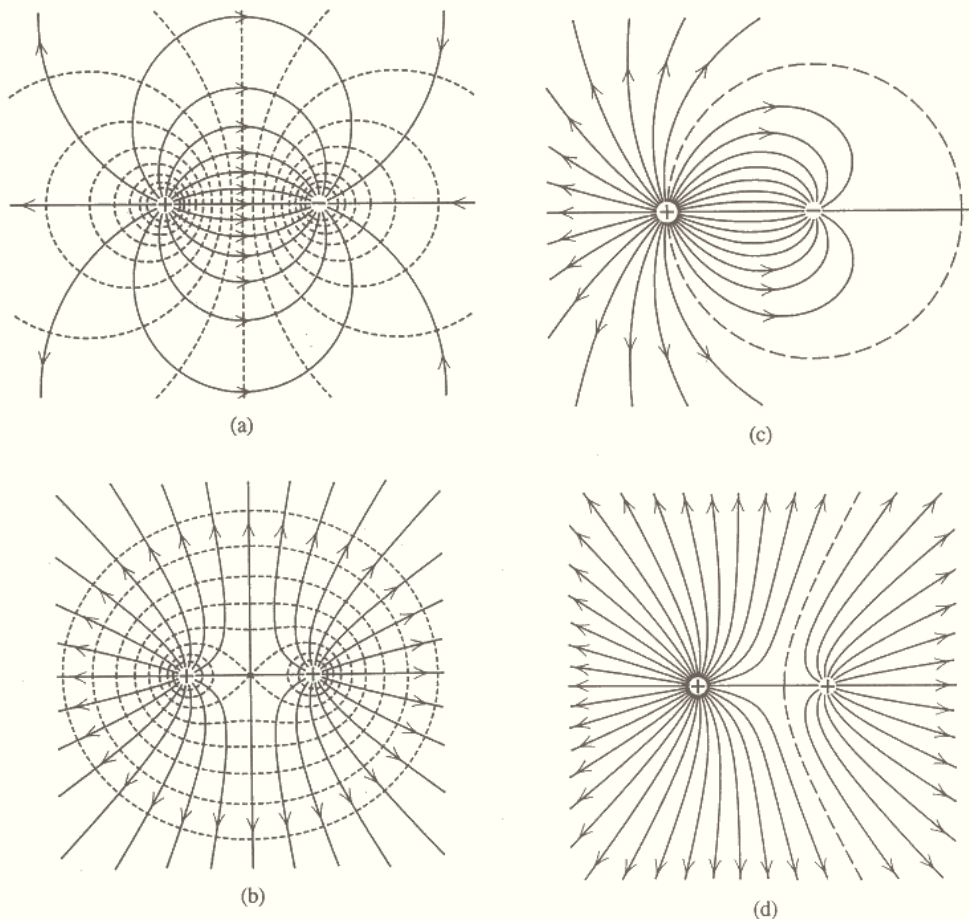
$$F' = \frac{dF}{d\mathcal{A}} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad \text{newtons/meter}^2. \quad (6-30)$$

Bir iletken üzerindeki birim alana etkiyen kuvvet alanda depolanan enerjiye eşittir. Yüzey alanı $\mathcal{A}$ olan bir iletken yüzeyine etkiyen net elektrostatik kuvvet

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\mathcal{A}} E^2 d\mathcal{A}, \quad (6-31)$$

Olur. Burada $d\mathcal{A}$ yönü dışa doğru olan bir vektördür. Lokal elektrikselsel kuvvet iletkeni alan içine doğru çekme eğilimindedir. Başka bir deyişle iletken üzerinde negatif bir basınç etkisi üretir. Havada ve boşlukla bu kuvvet ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Fakat yalıtkanlarda büyük olabilir.

5.6.1 ELEKTRİKSEL KUVVETLER VE E ALAN ÇİZGİLERİ



Şekilde dört çift çizgisel yük için **E** çizgileri gösterilmiştir. Şekil (a) ve (c) 'de kuvvet birbirini çeken yönde (b) ve (d)' de ise birbirini iten yöndedir. Metre² başına itici ve çekici kuvvet bir önceki bölümden de görülebileceği gibi $\epsilon_0 E^2/2$ 'dir. (a) ve (b) de her iki yük birbirine eşit (c) ve (d) de soldaki sağdakinin iki katıdır.

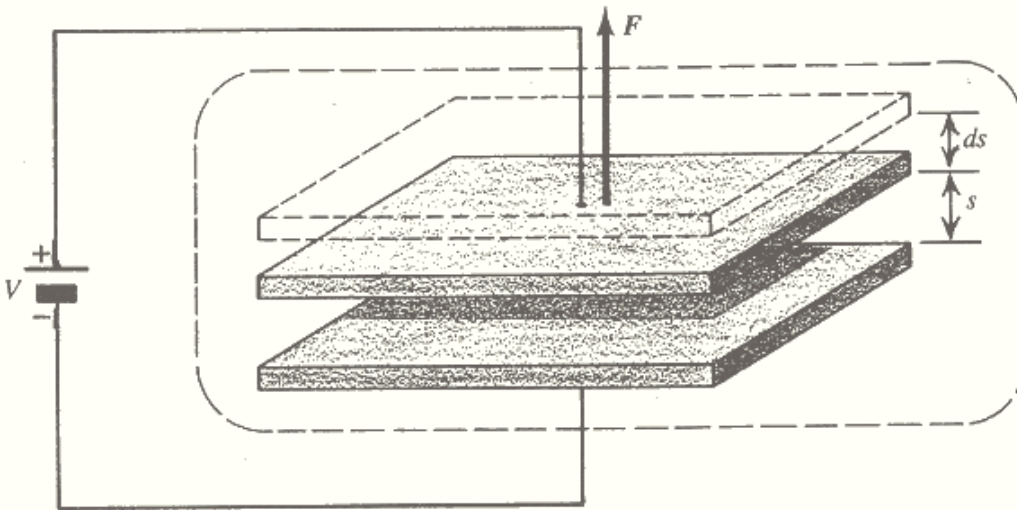
5.7 GÖRSEL ÇALIŞMA METODU İLE ELEKTRİKSEL KUVVET HESABI

Elektriksel kuvveti hesaplamada bir başka yol **Görsel Çalışma Metodu** 'dur. Bu metod önce sonsuz küçüklükte bir yerdeğiştirmeyi sonrada enerjinin korunumu kanununun uygulanmasını içerir. İlk önce bir sistem tanımlanır sonrada yerdeğiştirme nedeni ile sisteme verilen enerji hesaplanır. Bu enerji sistemim iç enerji artışına eşittir.

Bu metod genel ve güvenilir bir metoddur fakat iki şart göz önünde bulundurulması gerekir.

- Hangi sistemden bahsedildiğinden tam ve kesin bir şekilde emin olunmalıdır.
- Uygun işaretlerin kullanılmasında dikkatli olunmalıdır.

ÖRNEK: PARALEL DÜZLEM KONDANSATÖR



Şekildeki gibi sabit V geriline bağlanmış bir paralel düzlem kondansatörü düşünelim. Diyelimki kondansatör plakaları arası mesafe s ds kadar artsın ve bizde **Görsel Çalışma Metodu**'nu uygulayalım. Kapasite ile alakalı enerji hesaplanacaktır. Sonuç olarak üst plakanın ds kadar yerdeğiştirmesi ile sisteme verilen net enerji kapasitede depolanan enerji artışına eşittir.

Diyelimki ξ_F $\mathbf{F}$ kuvveti tarafından kapasiteye verilen mekanik enerji ξ_B ise batarya tarafından kapasiteye verilen enerji ve

ξ_E de kapasitedeki enerji artışı olsun. Böylece

$$\xi_F + \xi_B = \xi_E, \quad (6-32)$$

$$\xi_F = F ds, \quad \xi_B = V dQ, \quad (6-33)$$

Burada dQ batarya tarafından kondansatöre verilen extra yükür.

burada

$$\mathcal{E}_B = V(V dC) = V^2 d\frac{\epsilon_0 \mathcal{A}}{s} = -V^2 \epsilon_0 \mathcal{A} \frac{ds}{s^2} = -(\epsilon_0 \dot{E}^2)(\mathcal{A} ds). \quad (6-34)$$

Eğer ds pozitif ise dC negatiftir ve enerji kapasiteden bataryaya doğru akar. Sonuç olarak $E=V/s$ olduğu için

$$\mathcal{E}_E = d\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A} s\right) = d\left(\frac{\epsilon_0 V^2 \mathcal{A} s}{2s^2}\right) = \epsilon_0 \frac{\mathcal{A} V^2}{2} \left(-\frac{ds}{s^2}\right) = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A} ds. \quad (6-35)$$

Denklemdaki negatif işarete dikkat edilmelidir. $\epsilon_0 E^2/2 \mathcal{A} s$ 'in artışından daha hızlı düşer. Sonuç olarak

$$F ds - \epsilon_0 E^2 \mathcal{A} ds = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A} ds, \quad (6-36)$$

$$F = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathcal{A}, \quad (6-37)$$

Ve birim alandaki kuvvet birim hacimde depolanan enerjiye eşittir. Kaynak tarafından verilen enerjinin yarısı mekanik enerjiye diğer yarıda elektrik enerjisine dönüşür. Bu genel bir kuraldır.

6. ELEKTRİK ALANLAR V.

- Giriş
- Temel Polarizasyon İşlemleri
- Elektrik Polarizasyon
- Serbest ve Bağlı Yükler
- Polarize Yalıtkanın Elektrik Alanı
- Yalıtkanın Varlığında Gauss Yasası
- Elektrik Akı Yoğunluğu ($\mathbf{D}$) ve Diverjansı
- Elektrik Duyarlılık (χ_e)
- Bağlı Geçirgenlik (ϵ_r)
- Yerdeğiştirme Akım Yoğunluğu ($\partial\mathbf{D}/\partial t$)

6.1 GİRİŞ

Yalıtkanlar iletkenler gibi harici uygulanan elektrik alanın kontrolünde sürüklenen serbest yük taşıyıcılarına sahip değildirler. Gerçek yalıtkanlarda yüklerin tamamı atomuna yada molökülüne bağlıdır ve ancak çok küçük mesafede harekete zorlanabilirler. Bu durumda pozitif yükler bir tarafa negatif yüklerde diğer tarafa giderler. Bu hale gelmiş yalıtkana **polarize olmuş** yalıtkan denir.

Bazı moleküllerin kalıcı dipol momentleri vardır ve bunlara **polar**, diğerlerine ise **nonpolar** denir.

Bazı malzemeler normal şartlarda yalıtkandır ve uygun şartlarda iletken olurlar. Bunlara örnek **foto-iletken** sayılabilir. Foto-iletken normalde yalıtkandır ve işığa tabi tutulursa iletken hale geçer.

Bu bölümde yalıtkanlarla alakalı polarizasyon, duyarlılık ve bağıl geçirgenlik durağan alanlar için incelenecektir.

6.2 ÜÇ TEMEL POLARİZASYON İŞLEMİ

- (1) Uygulanan elektrik alanın tesiri ile moleküldeki elektron bulutunun merkezi yükün çekirdeğinin merkezine göre biraz kayar. Buna **elektronik polarizasyon** denir. Bu yerdeğiştirme çok küçüktür ve atomik ölçülerde bile atomun çapının 10^{-8} ' de biridir.
- (2) Uygulanan elektrik alanın tesiri ile polar moleküller dizilirler ve dahada polarize olurlar. Buna **oryantasyonel polarizasyon** denir. Bununla birlikte termal çarpışmalar nedeni ile oluşan çarpışmalar bu dizilmeyi bozar.
- (3) Uygulanan elektrik alanın tesiri ile NaCl gibi bazı malzemelerde iyonlar farklı yönlerde hareket ederler. Buna **atomik polarizasyon** denir.

Polarize yalıtkanların kendi alanları mevcuttur.

6.3 ELEKTRİK POLARİZASYON (**P**)

Eğer verilen bir noktanın yakınlarında verilen bir yönde molekül başına ortalama vektör dipol momenti **p** ve metreküp başına molekülde *N* ise

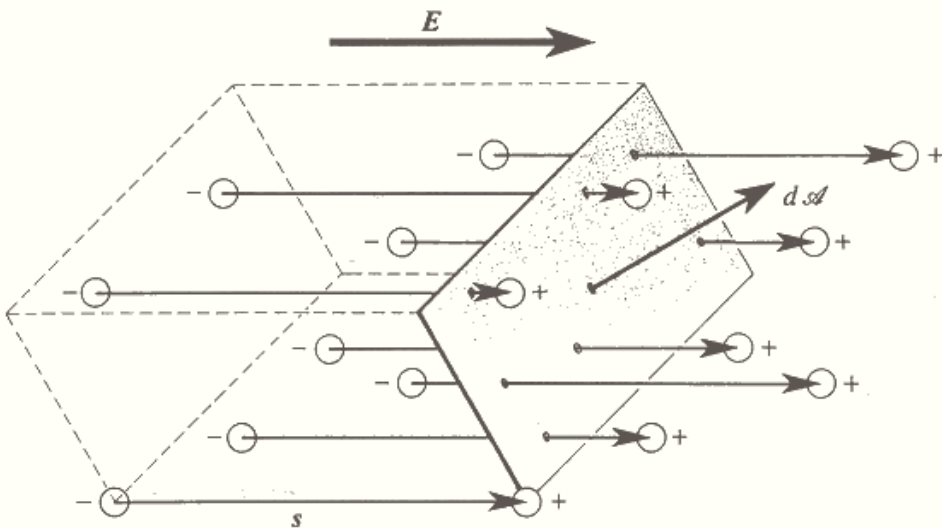
$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} \quad (9-1)$$

ye **elektrik polarizasyon** denir. Sonuç olarak **P** verilen bir noktada birim hacimdeki dipol momentidir. Bölüm 4.5 hatırlanırsa normal ve nötür molekülde net yük yoğunluğu sıfır olduğundan yük dağılımının dipol momenti seçilen orjinden bağımsızdır.

6.4 SERBEST VE BAĞLI YÜKLER

Polarizasyon yüklerin yalıtkanın ya içinde yada yüzeyinde birikmesine sebep olur. Bu tür yüklere **bağlı yükler** denir. Diğer tür yüklere ise **serbest yükler** denir. Serbest yüklere örnek iyi iletkenlerdeki iletkenlik elektronları verilebilir.

6.4.1 BAĞLI YÜSEYSEL YÜK YOĞUNLUĞU (σ_b)



Şekildeki gibi yalıtkan içinde dA elementi hayal edelim ve yalıtkanımızda nonpolar olsun. Yalıtkan polarize olduğu zaman molekülün $+Q$ yükünün merkezi $-Q$ yükünün merkezinden s kadar kayar. Sonsuz küçüklikteki bölgede bu s mesafesi bütün moleküller için aynıdır.

Elektrik alan uygulandığı zaman n_+ tane pozitif yük alan elementini s yönünde ve n_- tane negatif yükde ters yönde geçer.

dA yüzeyinden s yönünde geçen net yük

$$dQ = n_+ Q - n_- (-Q) = (n_+ + n_-) Q.$$

(9-2)

Burada $n_+ + n_-$ basitçe hayali $s \cdot d\mathcal{A}$ hacmindeki molekül sayısıdır. Sonuç olarak

$$dQ = NQs \cdot d\mathcal{A} = Np \cdot d\mathcal{A} = \mathbf{P} \cdot d\mathcal{A}, \quad (9-3)$$

Burada Qs tek bir molekülün dipol momentidir. Eğer $d\mathcal{A}$ iletkenin yüzeyinde ise dQ yüzeyde birikir ve **bağlı yüzeysel yük yoğunluğu**

$$\sigma_b = \frac{dQ}{d\mathcal{A}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (9-4)$$

Burada $\hat{\mathbf{n}}$ yönü yüzeyden dışa doğru olan birim vektördür. Sonuç olarak σ_b $\mathbf{P}$ 'nin dışa doğru olan normal bileşenine eşittir.

6.4.2 BAĞLI HACİMSEL YÜK YOĞUNLUĞU (ρ_b)

Tamami yalıtkanın içinde hacmi v olan kapalı bir $\mathcal{A}$ yüzeyinden dışarı doğru akan net bağlı yük

$$Q_{\text{out}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}, \quad (9-5)$$

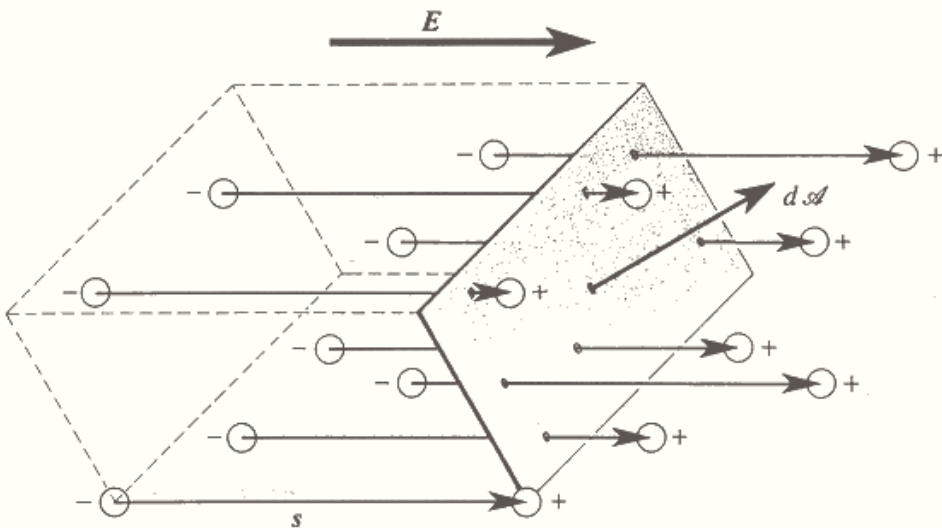
ve v hacminde kalan net yük $-Q_{\text{out}}$ olur. Eğer ρ_b v hacminde arta kalan hacimsel yük yoğunluğu ise

$$\int_v \rho_b dv = -Q_{\text{out}} = -\int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = -\int_v \nabla \cdot \mathbf{P} dv. \quad (9-6)$$

Sonuç olarak bağlı hacimsel yük yoğunluğu

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (9-7)$$

6.4.3 POLARİZASYON AKIM YOĞUNLUĞU (J_b)



Zamanla değişen elektrik alanın etkisi altında bağlı yüklerin hareketi **polarizasyon akımı** oluşturur. Şekildeki gibi yalıtkanın içinde dA yüzeyini düşünelim. Polarizasyon sıfırdan $\mathbf{P}$ 'ye ulaştığında $dQ_b = P dA$ kadar yük $\mathbf{P}$ yönünde dA yüzeyini geçer ve akım

$$I = \frac{dQ_b}{dt} = \frac{|d\mathbf{P}| dA}{dt} \quad (9-8)$$

Sonuç olarak eğer uzayda verilen bir noktada $\mathbf{P}$ zamanın bir fonksiyonu ise bağlı yüklerin hareketi polarizasyon akım yoğunluğu oluşturur ve

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (9-9)$$

ye eşit olur.

6.5 POLARİZE YALITKANIN ELEKTRİK ALANI

Bölüm 9.4'de gördük ki polarizasyon yalıtıkta yüklerin ya yüzeyde yada yalıtkanın içinde birikmesine sebep olur. Sonuç olarak net yük yoğunluğunun hangi mazemede olduğuna bakılmaksızın Coulomb yasası uygulanabilir. Boşlukta konumlanmış kapalı yüzey alanı $\mathcal{A}$ ve hacmide v olan bir polarize yalıtkanın oluşturduğu potansiyel

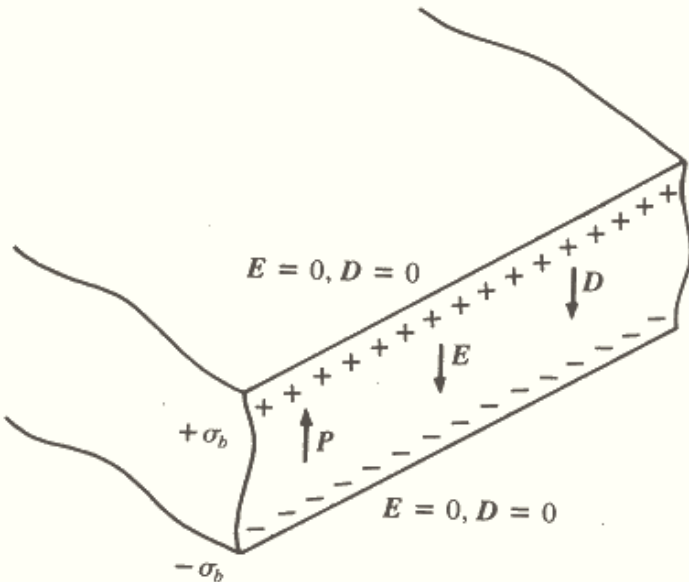
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_b dv'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{A}'} \frac{\sigma_b d\mathcal{A}'}{r}, \quad (9-10)$$

Burada r $P'(x',y',z')$ noktası ile $P(x,y,z)$ noktaları arasındaki mesafedir. Eğer ortamda serbest yüklerde varsa benzer integraller buna eklenmelidir. Sonuç olarak

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{A}'} \frac{\sigma \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathcal{A}', \quad (9-11)$$

Burada $\hat{\mathbf{r}}$ 'nin yönü P' den P ye doğrudur ve ρ ve σ toplam yük yoğunluklarıdır (serbest + bağlı).

ÖRNEK: SONSUZ TABAKA ELEKTRETİN ALANI



Elektret sürekli mıknatısa eşdeğer elektriksel alettir. Yalıtkanların çoğu polarizasyonunu elektrik alan kalkar kalkmaz kaybederler. Fakat bazı yalıtkanlar polarizasyonlarını uzun süre kaybetmezler. Mesela bazı polimerler (PVF_2 (Polyvinylidene fluoride), tipik kalıcı polarizasyonu $50\text{-}70 \text{ mC/metre}^2$) oda sıcaklığında polarizasyonlarını yüzlerce yıl tutabilir. Bu tür malzemeler mikrofon ve transducer vs. Yapımında kullanılırlar.

Kural gereği elektret polarizasyonu yüzeye dik ve tabaka formundadır.

Köşe etkileri ihmal edilirse tabaka elektret için P düzgündür ve σ_b ye eşittir. Denklem 9.7 gereği ρ_b sıfırdır. Tabakanın içinde

$$E = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}. \quad (9-12)$$

olur.

6.6 YALITKANIN VARLIĞINDA GAUSS YASASI

Diyelimki v hacmi bir kısmı bu hacmin içinde ve bir kısmıda bu hacmin dışında olan çeşitli yalıtkanlar içersin. v hacmi içindeki toplam serbest ve bağlı yüklerin toplamı $Q_f + Q_b = Q$ dir. v hacminin yüzeyinde yüzeysel yükler bulunmamaktadır. Gauss Yasası gereği kapalı bir $\mathcal{A}$ yüzeyinden çevrelediği yük Q ise dışarı akan $\mathbf{E}$ akısı

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (9-13)$$

Bu Gauss Yasasının genel formudur. Eğer v hacmi bütünüyle yalıtkanın içinde ise yüzeysel yükler bulunmaz ve

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v (\rho_f + \rho_b) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv, \quad (9-14)$$

Burada $\rho = \rho_f + \rho_b$ toplam yük yoğunluğudur. Diverjans teoremi uygulanırsa

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (9-15)$$

Bulunur.

6.7 YALITKANDA POISSON VE LAPLACE DENKLEMLERİ

Yalıtkan içinde V için Poisson denklemi

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0. \quad (9-16)$$

Laplace denklemi toplam elektrik yük yoğunluğunun sıfır olduğu yerlerde uygulanır ve

$$\nabla^2 V = 0, \quad (9-17)$$

Şeklindedir.

6.8 ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU (**D**) VE DİVERJANSI

Denklem 9.15' de göre

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0}. \quad (9-18)$$

9.18 denkleminde ρ_b yerine denklem 9.7 'deki değeri konursa

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f. \quad (9-19)$$

Sonuçtaki vektör

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (9-20)$$

Ye elektrik akı yoğunluğu denir ve diverjansı derbest hacimsel yük yoğunluğuna eşittir. Sonuç olarak

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (9-21)$$

Tamamı ile yalıtkan içindeki bir v hacmi Q_f serbest yükünü çevrelerse (yüseysel yük mevcut değil)

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathcal{A} = \int_v \rho_f dv = Q_f. \quad (9-22)$$

Buradan 9.20 denklemi ispatlanabilir.

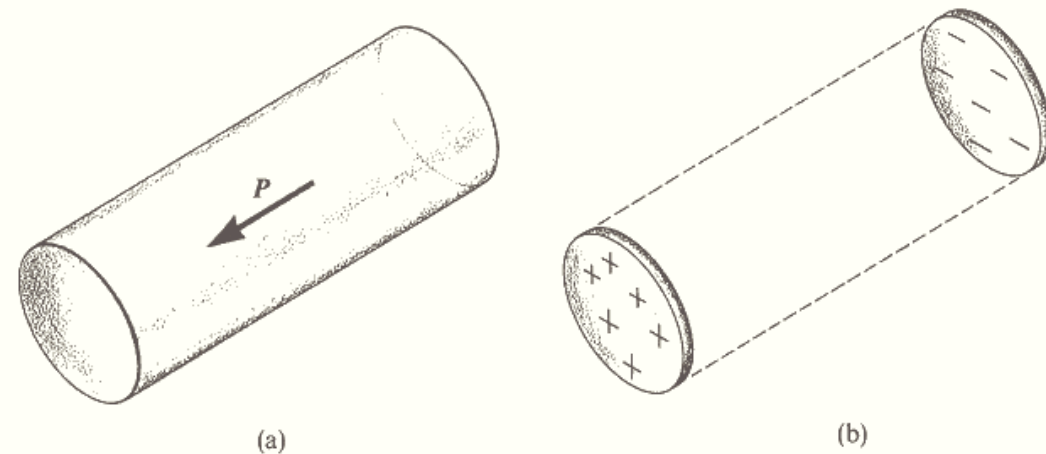
$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathcal{A} = \epsilon_0 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathcal{A} = Q + \int_v \nabla \cdot \mathbf{P} dv \quad (9-23)$$

$$= Q - \int_v \rho_b dv = Q - Q_b = Q_f \quad (9-24)$$

$\mathbf{D}$ 'nin diverjansının sadece ρ_f 'e bağlı olması $\mathbf{D}$ 'nin sadece ρ_f 'e bağlı olacağı anlamına gelmez. $\mathbf{D}$ 'yi bulmak için 9.21 denklemi sınır koşullarına göre integre edilmelidir.

$\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{D}$ 'nin derivasyonlarının kullanılabilmesi için uzay türevlerinin olması gerekir. Eğer iki medya arasındaki arayüzden bahsediliyorsa diverjans formlar kullanılamaz bunun yerine daha genel olan Gauss yasasının integral formu kullanılmalıdır.

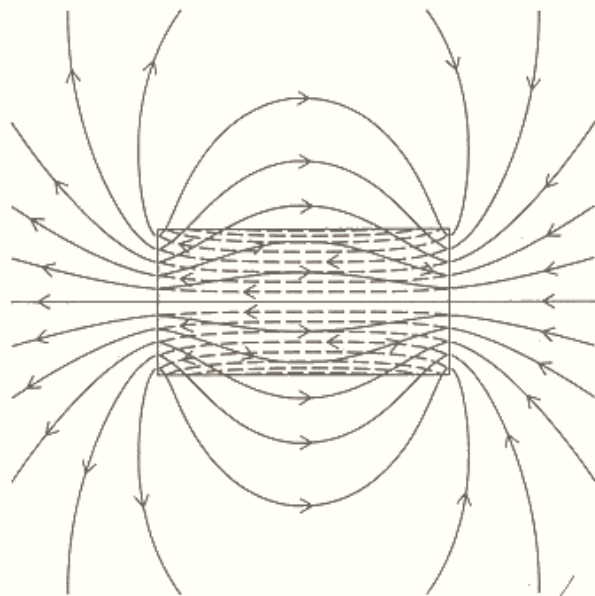
ÖRNEK: BAR ELEKTRET



Şekil (a) 'daki gibi bar elektretin içinde $\mathbf{P}$ düzgündür. Bu ilginç fakat gerçek olmayan bir örnektir çünkü gerçekte $\mathbf{P}$ düzgün değildir. Sonuçta $\mathbf{P}$ 'nin diverjansı sıfırdır ve denklem 9.7 gereği ρ_b 'de sıfırdır. Sağlı yükler sadece silindirin alt ve üst yüzeylerinde bulunur. bar elektretin içinde ve dışındaki $\mathbf{E}$ alanı düzgün yük yoğunlukları $+P$ ve $-P$ olan dairesel tabakanın alanına eşittir (Şekil (b)).

Dışarda $\mathbf{D}$ çizgileri $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ olduğu için $\mathbf{E}$ çizgileri ile aynıdır.

İçerde $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ olduğu için $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{P}$ hemen hemen zıt yönleri işaret eder. Bu durum alt şekilde gösterilmiştir.



6.9 ELEKTRİK DUYARLILIK (χ_e)

Birçok yalıtkanda $\mathbf{P}$ $\mathbf{E}$ ile orantılı ve aynı yöndedir. Sonuç olarak lineer,ve izotropik yalıtkanda

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (9-25)$$

Burada χ_e **ortamın elektrik duyarlılığıdır**. Eğer yalıtkan homojen ise elektrik duyarlılıkkoordinat sisteminden bağımsızdır.

6.10 BAĞIL GEÇİRGENLİK (ϵ_r)

Lineer ve izotropik yalıtkanda 9.25 denklemi uygulanabilir ve

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (9-26)$$

burada

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (9-27)$$

Bağıl geçirgenlikdir. Bu değer boyutsuz olup birden büyüktür. ϵ elektriksel geçirgenliktir birimi ϵ_0 ile aynıdır yani **frad / metre** 'dir. Böylece lineer ve izotropik yalıtkanda

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}. \quad (9-28)$$

Tabloda üç en çok kullanılan frekansta bazı yalıtkanların bağıl elektriksel geçirgenlikleri verilmiştir. Gazların bağıl geçirgenliği normal sıcaklık ve basınçta birden çok az büyüktür. Mesela havanın bağıl geçirgenliği $\epsilon_r = 1.000536$ dır.

TYPE	FREQUENCY		
	100	10^6	10^{10}
Barium titanate	1250	1140	100
Benzene	2.28	2.28	2.28
Birch (yellow)		2.7	1.95
Butyl rubber	2.43	2.40	2.38
Carbon tetrachloride	2.17	2.17	2.17
Fused silica	3.78	3.78	3.78
Glass (soda borosilicate)	5.0	4.84	4.82
Ice		4.15	3.20
Lucite	3.20	2.63	2.57
Neoprene	6.70	6.26	4.0
Polyethylene	2.26	2.26	2.26
Polystyrene	2.56	2.56	2.54
Sodium chloride		5.90	5.90
Soil (dry loam)		2.59	2.55
Steatite	6.55	6.53	6.51
Styrofoam	1.03	1.03	1.03
Teflon	2.1	2.1	2.08
Water	81	78.2	34
Wheat (red, winter)		4.3	2.6

ÖRNEK: SERBEST VE BAĞLI HACİMSSEL YÜK YOĞUNLUKLARI

Serbest hacimsel yük yoğunluğunun (ρ_f) varlığı yalıtkanı polarize eder ve ρ_b 'yi artırır. Eğer yalıtkan lineer ve izotropik ise

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \mathbf{D}, \quad (9-29)$$

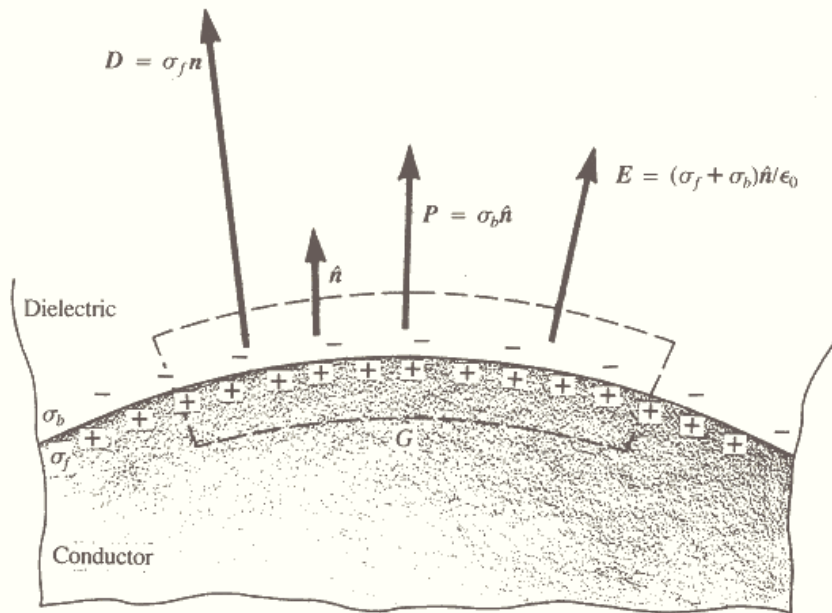
$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \nabla \cdot \mathbf{D}, \quad (9-30)$$

$$\rho_b = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \rho_f. \quad (9-31)$$

Eğer $\rho_f=0$ ise ρ_b de sıfırdır. Eğer ρ_f sıfır değilse, ki bu çok nadir bir durumdur, toplam hacimsel yük yoğunluğu ρ ρ_f ile aynı işarettedir fakat daha küçüktür:

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \frac{\rho_f}{\epsilon_r}. \quad (9-32)$$

ÖRNEK: YALITKANLA İLETKEN ARASINDAKİ ARAYÜZDE SERBEST VE BAĞLI YÜZEYSEL YÜK YOĞUNLUKLARI



İletkenle lineer izotropik yalıtkan arasındaki arayüzde iletken σ_f yalıtkan ise σ_b taşır. Eğer alan durağan ise iletkenin içinde $\mathbf{E}=0$ ve $\mathbf{D}=0$ dır. Arayüzde $\mathbf{E}$ 'nin teğetsel bileşenin sürekli olması gerektiğinden hem $\mathbf{E}$ hemde $\mathbf{D}$ arayüze dik, yalıtkanın içinde ve iletkene yakındır.

Şimdi şekildeki gibi arayüzde A yüzeyini kaplayan ve her iki ortamdada bir kısmı bulunan G gibi bir Gauss hacmi düşünelim.pozitif yön yukarı doğru alınırsa

$$\sigma_f = D = \epsilon_r \epsilon_0 E = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E - \sigma_b \quad (9-33)$$

ve

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_f + \sigma_b}{\epsilon_0} \quad (9-34)$$

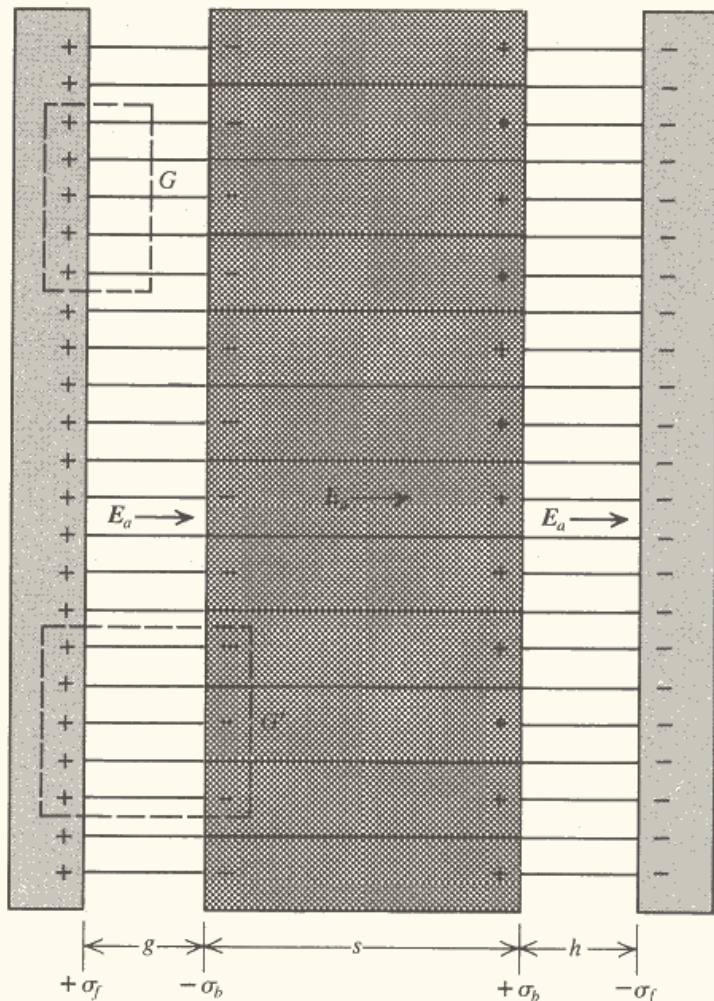
Dikkat edilirse 9.34'deki sonuca 9.13'deki Gauss yasası uygulanarakta ulaşmak mümkündür.
 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ olduğu için

$$\sigma_f = D = \epsilon_r(\sigma_f + \sigma_b), \quad \sigma_b = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\sigma_f, \quad (9-35)$$

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_b = \frac{\sigma_f}{\epsilon_r}. \quad (9-36)$$

9.35 ve 9.36 denklemleri ile 9.31 ve 9.32 denklemleri birbirine çok benzer

ÖRNEK: YALITKAN İZOLELİ PARALEL DÜZLEM KONDANSATÖR



Şekilde paralel düzlem kondansatörün kesiti gösterilmiştir. Şekilde daha iyi anlaşılabilmesi için yalıtkanın her iki tarafında da bir hava boşluğu gösterilmiştir. Fakat gerçekte yalıtkanla iletken birbirine yapışıktır.

Yüklerin ve alanın statik olduğu varsayılmıştır. Ayrıca hemen hemen her zaman yalıtıkanda $\rho_f = 0$, sonuçta $\rho_b = 0$ dolayısı ile denklem 9.7 gereği P'nin diverjansında sıfırdır. Köşe etkileri ihmal edilirse yüzeysel yük yoğunlukları σ_f ve σ_b düzgündür. Benzer şekilde **P**, **E** ve **D** yalıtıkanda ve hava boşluğunda düzgündür.

G Gauss hacminin bir kısmı iletken bir kısmı hava boşluğunda olmak üzere yerleştirilmiştir. İletken içinde **E**=0 ve **D**=0 dır. Böylece hava boşluğunda

$$E_a = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}, \quad D_a = \sigma_f. \quad (9-37)$$

Benzer şekilde G' hacmi için

$$E_d = \frac{\sigma_f + \sigma_b}{\epsilon_0}, \quad D_d = \sigma_f. \quad (9-38)$$

Fakat

$$E_d = \frac{D_d}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_r \epsilon_0}. \quad (9-39)$$

Bunu

$$\sigma_b = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_f. \quad (9-40)$$

Takip eder. Tabiki Bölüm 6.4.1' den $|\sigma_b| = \rho$ dir. Böylece kapasite boyunca V gerilimi

$$V = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} (g + h) + \frac{\sigma_f}{\epsilon_r \epsilon_0} s = \frac{Q}{\epsilon_0 \mathcal{A}} \left(g + h + \frac{s}{\epsilon_r} \right), \quad (9-41)$$

Burada $\sigma_f = Q/\mathcal{A}$ dir. Kapasite ise

$$\frac{Q}{V} = \frac{\sigma_f \mathcal{A}}{V} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{A}}{g + h + s/\epsilon_r}. \quad (9-42)$$

Yalıtkanın her iki tarafındaki boşluk yok sayılırsa ($g+h=0$) gerilim

$$V = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} s, \quad (9-43)$$

Ve kapasite

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{s}. \quad (9-44)$$

Dikkat edilirse burada bulunan kapasite değeri hava boşluğu olan paralel düzlem kondansatörün kapasitesinde ϵ_r kat daha büyüktür. Kapasitenin yalıtkanlı ve yalıtkansız ölçümü bağlı elektriksel geçirgenliğin (ϵ_r) ölçülmesinde uygun bir yoldur.

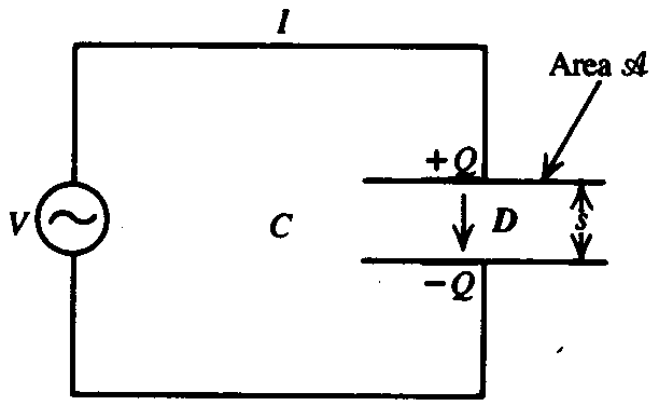
ÖRNEK: YALITKAN İÇİNDEKİ SERBEST YÜKLERİN ALANI

Q_f serbest yükünü taşıyan küçük bir iletken kürenin sonsuz homojen, izotropik, lineer ve durağan yalıtkan içinde gömülü olduğunu düşünelim. Yalıtkanın iletken küreye değen kısmı iletkenle ters işaretli bağlı yükler bulundurur. Kürenin yüzeyinin her bir noktasında 9.36 denklemi uygulanabilir ve net yük Q_f/ϵ_r . Sonuç olarak yalıtkan içinde küreden r kadar uzaklıktaki bir noktadaki elektrik alan

$$E = \frac{Q_f/\epsilon_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2}. \quad (9-45)$$

Benzer şekilde yukarda olduğu gibi serbest yük yoğunluğu ρ_f ilekten içinde ise net yük yoğunluğu ρ_f/ϵ_r ve elektrik alanda E_0/ϵ_r olur. Burada E_0 boşluktaki aynı yükün alanıdır. Eğer yalıtkan sonsuz değilme yüzeydeki bağlı yüklerin alanında dikkate alınmalıdır.

6.11 YERDEĞİŞTİRME AKIM YOĞUNLUĞU



Şekilde alternatif gerilim kaynağına bağlı paralel düzlem kondansatör gösterilmiştir. İletkenlerin düzlem alanı A ve plakalar arası mesafe de s dir. Kenar etkileri ihmal edilirse

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{Es}{1/j\omega C} = j\omega Es \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{s} \quad (9-46)$$

$$= A j\omega \epsilon_r \epsilon_0 E = A j\omega D = A \frac{dD}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (9-47)$$

Sonuç olarak kapasitenin içinde akım yoğunluğu $j\omega D$ veya daha genel hali ile $\partial \mathbf{D} / \partial t$ dir. Bu değere **yer değiştirme akım yoğunluğu** denir. Yerdeğiştirme akım yoğunluğu iki kısım içerir

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (9-48)$$

9.48 denkleminde sağdaki ikinci terim Bölüm 6.4.3' deki polarizasyon akım yoğunluğudur. İlk terimin ismi yoktur ve boşlukta bile bulunur.

7. ELEKTRİK ALANLAR VI.

- Giriş
- Gerçek Yalıtkanlar
- Arayüzdeki Süreklilik Şartları
- Yalıtkanın Varlığında Yük Dağılımının Potansiyel Enerjisi
- Yalıtkanın Varlığında Elektriksel Kuvvetler

7.1 GİRİŞ

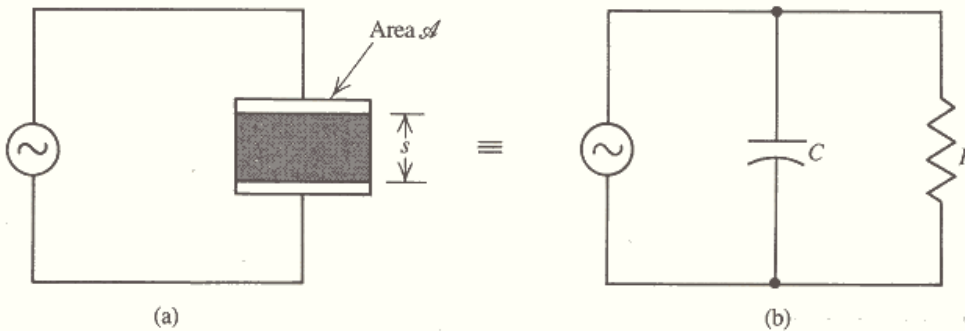
Yalıtkan malzemelerle alakalı bu ikinci ve son bölümde özet olarak gerçek yalıtkanların bazı karakteristikleri: sonlu iletkenlik, ϵ_r 'nın frekansa ve zamana bağımlılığı, anizotropi, ferroelektricity ve histerizis hakkında bilgi verilecektir. Daha sonra arayüzdeki süreklilik şartlarından bahsedilecek son olarak da yalıtkanın varlığında elektrik alanda depolanan enerjiden bahsedilecektir.

7.2 GERÇEK YALITKANLAR

Polyetylene gibi bazı yalıtkanlar ideale çok yakındır. Bunlar homojen, izotropik, iletkenliği sıfıra çok yakın ve bağıl geçirgenliği pratikte frekanstan bağımsızdır. Bununla birlikte birçok yalıtkan daha kompleks davranış sergilerler.

7.2.1 KAYIPLI YALITKANLAR

Bir haliyle iletkenlik özelliği gösteren yalıtkanlara **kayıplı** denir. Mesela odun ve buğday gibi doğal malzemeler içinde bulunan su nedeni ile iletkenlik özelliği gösterirler. Alternatif alanın etkisi altında iletkenliği complex geçirgenlik cinsinden ifade etmek uygundur.



Şekildeki gibi kayıplı yalıtkan içeren paralel düzlem kondansatörü ele alalım. Akım ideal kapasite ile direncin akımına eşittir. Direnç

$$R = \frac{s}{\sigma A} \quad (10-1)$$

'e eşittir. Burada σ yalıtkanın iletkenliğidir (Bölüm 3.4.1). Sonuç olarak

$$I = Vj\omega C + \frac{V}{R} = Vj\omega \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{s} + V \frac{\sigma A}{s}. \quad (10-2)$$

Bu durumda ϵ_r 'yi aşağıdaki gibi farklı tanımlamak uygundur. Bu tanım

$$I = \frac{Vj\omega(\epsilon_r' - j\epsilon_r'')\epsilon_0 A}{s} = \frac{Vj\omega\epsilon_r\epsilon_0 A}{s}. \quad (10-3)$$

Böylelikle elektriksel geçirgenlik iletkenliği de içine alacak şekilde genişletilmiştir.

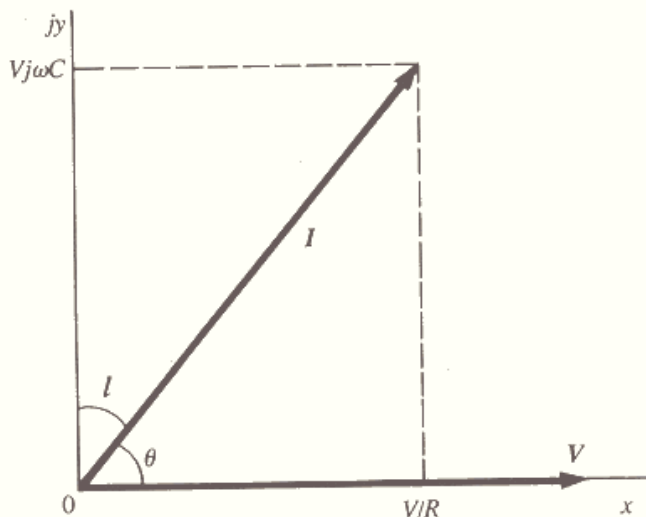
$$\epsilon_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r, \quad \epsilon''_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}. \quad (10-4)$$

Yeni ϵ_r gerçel kısmı denklem 10.2'deki ϵ_r 'ye eşittir. İmajiner kısımdaki negatif işarete dikkat edilmelidir. Geçirgenliğin gerçel kısmı elektrik alanda enerjiyi depolarken imajiner kısmı enerjiyi ısı olarak açığa çıkarır. Elektriksel geçirgenlik genellikle

$$\epsilon_r = |\epsilon_r| \exp(-jl), \quad (10-5)$$

Burada l kayıp açısıdır. Çoğunlukla oran olarak tanımlanır. Bu oran

$$\frac{\epsilon''_r}{\epsilon'_r} = \tan l \quad (10-6)$$



Yalıtkanın kayıp tanjantıdır. Aksi tanımlanmadığı sürece bağlı geçirgenlik Bölüm 6.10'daki tablodaki gibidir.

Şekilde V ve I fazörleri ve kayıp açısı gösterilmiştir. θ 'ya güç-faktör açısı denir.

7.2.2 ϵ_r 'NİN SICAKLIĞA VE FREKANSA BAĞIMLILIĞI

Bölüm 6.10'daki tablodanda görülebileceği gibi ϵ_r' frekansla düşerken ϵ_r'' frekansla artar. Bu çok kaba bir kuraldır çünkü atomlar ve moleküller özellikle 1 GHz'nin üzerinde rezonans sergilerler. **Yalıtkan (Dielektrik) ısıtma** frekansları birkaç mega hertz ile birkaç gigahertz arasındadır. Mikrodalga fırınları genellikle 2.45 GHz 'de çalışır. Bunlar yiyecek içindeki su moleküllerine etkileyerek çalışırlar.

Kural gereği malzemenin geçirgenliği erime ile çok artar. Mesela nitrobenzene'nin bağlı geçirgenliği 279 Kelvin civarındaki erime noktasında 3 den 35'e çıkar.

Dikkat edilirse bağlı geçirgenlik (ϵ_r) frekansın fonksiyonudur ve sadece saf sinüzoidal dalgalarda kesin bir şekilde tanımlanabilir.

7.2.3 ANİZOTOPLUK (ANISOTROPY)

Kristal yapıli katı malzemeler farklı kristal yönlerinde farklı yalıtkanlık özelliği gösterirler. Çünkü iyonlar bazı yönlerde diğer yönlerle göre daha hızlı ilerleyebilirler. Sonuç olarak bu tür malzemelerin duyarlılığı yöne bağlıdır ve $\mathbf{P}$ $\mathbf{E}$ ile aynı olacak diye bir şey yoktur.

Böylece $\mathbf{P}$ 'nin x yönündeki bileşeni

$$P_x = \epsilon_0(\chi_{exx}E_x + \chi_{exy}E_y + \chi_{exz}E_z), \quad (10-7)$$

Formundadır. Benzer şekilde diğer bileşenlerde tanımlanabilir. $\mathbf{P}$ 'nin her üç bileşeninde $\mathbf{E}$ 'nin her üç bileşenine bağlıdır. Sonuçta duyarlılığın 9 bileşeni vardır ve **tensör** dür. Gerçekte 6 bağımsız bileşen vardır ve koordinat sistemi kristale bağlı seşilirse üçe düşürülebilir.

Eğer duyarlılığın çeşitli bileşenleri $\mathbf{E}$ 'nin fonksiyonu değilse $\mathbf{P}$ $\mathbf{E}$ 'nin bileşenlerinin lineer fonksiyonudur ve yalıtkan lineerdir.

Anizotropik yalıtkanlarda aşığıdaki denklemler hala geçerlidir.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f, \quad (10-8)$$

Fakat bu üç vektör genellikle birbirine paralel değildir.

7.2.4 FERROELEKTRİKLİK (FERROELEKTRİCİTY)

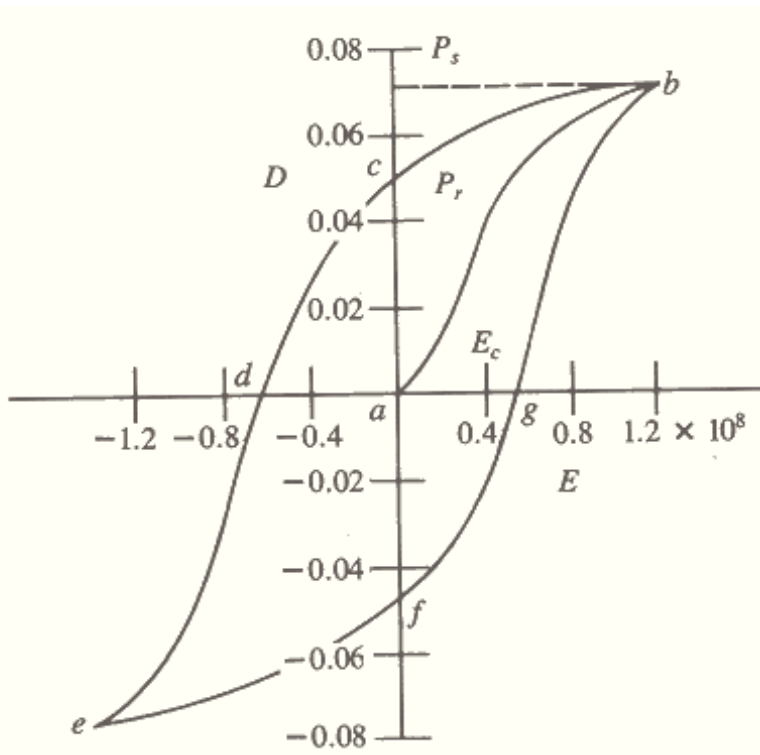
Ferroelektrik yalıtkanlar domain adı verilen mikroskobik kristal bölgeleri üzerindeki polarizasyonları çok ilginç özellik sergilerler. **Ferroelektrik** adı davranışı ferromagnetik malzemelere benzediği için verilmiştir. Malzeme Elektrik alana yerleştirildiği zaman düzgün polarize olan bölgeler komşu bölgeleri işgal edecek şekilde genişler ve sonunda birleşir.

Eğer ferroelektrik malzemenin sıcaklığı yavaş yavaş arttırılırsa kendi kendiliğinden olan polarizasyon genellikle bazı kompleks tarzda değişir ve **Curie sıcaklığı**'nın üzerinde da kaybolur. Bu sıcaklık malzemenin karakteristiğidir.

Ferroelektrik malzemelerin en yaygın kullanıldığı alan seramik kapasitelerdir. Çünkü bağlı geçirgenliği 10000'lere kadar çıkabilir. Kural olarak bu yalıtkanlar titanium bileşiğidir.

Bazı ferroelektrik yalıtkanlar belirli uygulamalarda kullanışlı olan kesin sıcaklık katsayılarına sahiptirler.

7.2.5 HİSTERİZİS (HİSTERESİS)



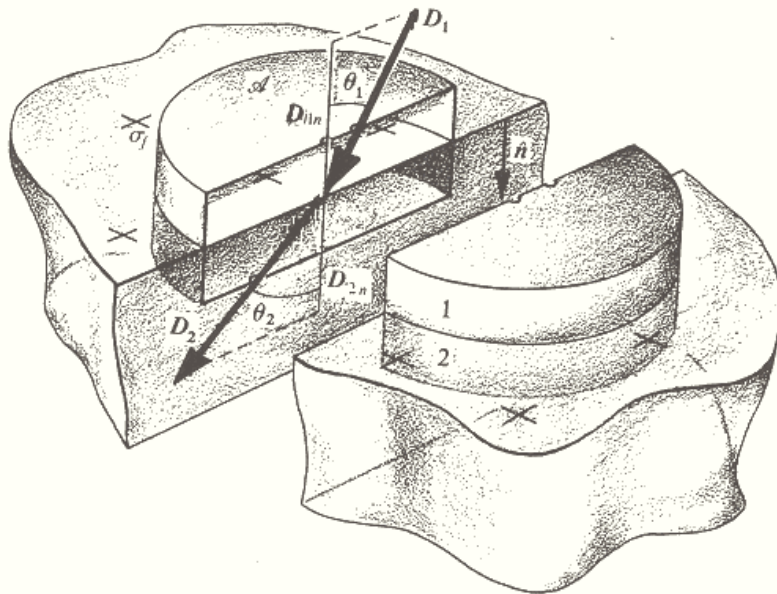
Ferroelektrik malzemeler ayrıca şekilde görüldüğü gibi histerisiz adı verilen bir özellikte sergilerler. Şekilde tipik bir ferroelektrik yalıtkanın histerizis eğrisi gösterilmiştir. Polarize olmamış yalıtkanla başlanırsa a noktasında $E=0$ 'dır. E 'deki artış D 'yide b noktasına kadar arttırır. Sonra E 'nin sıfıra kadar düşmesi c noktasında yalıtıkanda kalıcı bir D bırakır. D 'nin değeri sadece E 'ye bağlı olmayıp malzemenin geçmişinde bağlıdır. Sonuçta böyle malzemeler nonlinenerdir ve E ile D orantılı değildir.

7.3 ARAYÜZDE SÜREKLİLİK SARTLARI

7.3.1 POTANSİYEL V

Potansiyel V iki medya arasındaki sınır boyunca süreklidir. Aksi takdirde süreksizlikte tanımsız büyüklükde E anlamına gelirdi ki bu fiziksel olarak imkandır.

7.3.2 $\mathbf{D}$ 'NİN DİK BİLEŞENİ



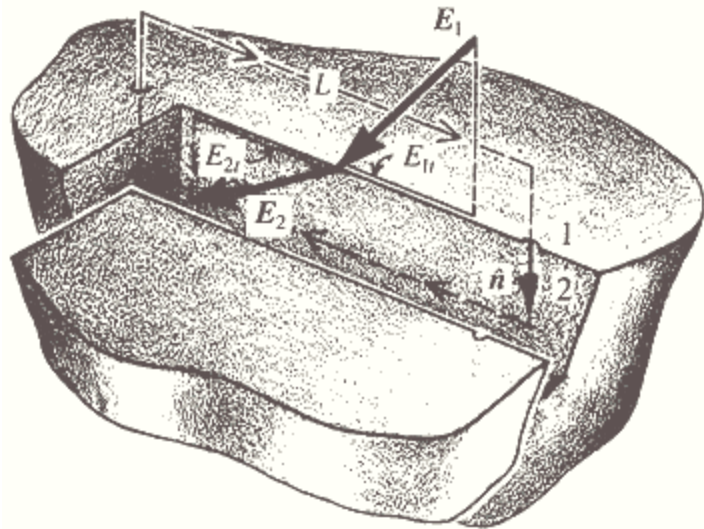
Şekildeki gibi kesiti $\mathcal{A}$ olan ve arayüzde bulunan çok küçük bir silindir hayal edelim. Silindirin alt ve üst yüzeyleri arayüze paralel ve arayüze çok yakındır. Arayüzde serbest yüzeysel yük yoğunluğu (σ_f) bulunur.

Gauss yasasına göre silindirden giren ve çıkan net $\mathbf{D}$ akısı çevrelenen serbest yüklere eşittir. $\mathbf{D}$ akısı sadece silindirin alt ve üst ve kenarlarından girer ve çıkar çünkü yükseklik çok küçüktür. Eğer $\mathcal{A}$ çok küçük ise $\mathbf{D}$ bu yüzey boyunca hemen hemen düzgündür ve sonuçta

$$(\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n})\mathcal{A} = \sigma_f \mathcal{A}, \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f, \quad (10-9)$$

Burada $\hat{\mathbf{n}}$ yönü medya 2 den 1 e doğru olan birim vektördür. Kural gereği iki yalıtkan arayüzü serbest yükler bulundurmazlar ve $\mathbf{D}$ 'nin dik bileşeni arayüz boyunca süreklidir. Sonuç olarak $\mathbf{E}$ 'nin dik bileşeni süreksizdir. Diğer yandan eğer bir medya iletken diğeri yalıtkan ise ve $\mathbf{D}$ 'de zamanın fonksiyonu değilse iletken $\mathbf{D}=0$ 'dır. Yalıtkan ise $\mathbf{D}=\sigma_f$ 'dir. Eğer $\mathbf{D}$ zamanın fonksiyonu ise 10.9 denklemi hale geçerlidir. Fakat iletken $\mathbf{D}$ sıfıra eşit değildir.

7.3.3 E'NİN TEĞETSEL BİLEŞENİ



Şekildeki gibi her iki kenar uzunluğu L olan vr arayüze çok yakın olan bir yol düşünelim. Kapalı yolun diğer iki kenarının uzunluğu sonsuz küçüklüktedir. Eger L uzunluğu çok kısa ise E bu uzunluk boyunca pek değişmez ve kapalı yol üzerinden integrali

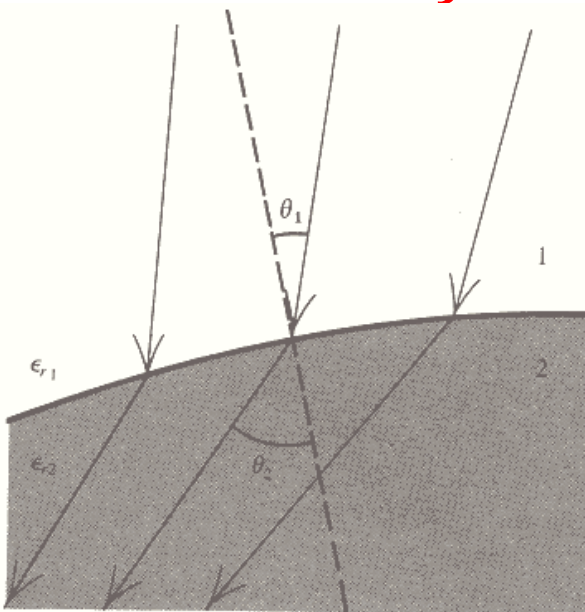
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1t}L - E_{2t}L. \quad (10-10)$$

Bölüm 2.5 gereği bu integral sıfırdır. Böylece

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \text{veya} \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (10-11)$$

Burada $\mathbf{n}$ bir önceki bölümdeki gibi tanımlanmıştır. $\mathbf{E}$ 'nin teğetsel bileşeni arayüz boyunca süreklidir.

7.3.4 E ÇİZGİLERİNİN ARAYÜZDE KIRILMASI



Şekilde görüldüğü gibi **E** ve **D** çizgileri iki lineer ve izotropik yalakanın oluşturduğu arayüzden geçerken yön değiştirir. Eğer serbest yüzeysel yük yoğunluğu sıfır ise **D**' nin dik bileşeni

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 \quad (10-12)$$

veya

$$\epsilon_{r1} \epsilon_0 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2. \quad (10-13)$$

Şartı sağlanmalıdır. Ayrıca **E** 'nin teğetsel bileşeni arayüz boyunca sürekli olmalıdır

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2. \quad (10-14)$$

10.14 denklemini 10.13 denklemine bölersek

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_{r1}} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_{r2}}. \quad (10-15)$$

Sonucu elde edilir.

7.4 YALITKANIN VARLIĞINDA YÜK DAĞILIMININ POTANSİYEL ENERJİSİ

Elektrik Alanlar IV 'de yükün boşlukta ve iletkende bulunması durumu için depolanan enerji hesaplanmıştır. Alana yalıtkanın ilavesi çözümde büyük zorluğa götürür fakat aşağıdaki kabullerle problem takip edilebilir hale gelir. Bu kabuller

- Serbest ve bağlı yükler sonsuza uzanır. Bu potansiyeli sonsuzda sıfıra götürür.
- Yalıtkan lineerdir (D E ile orantılıdır) fakat homojen veya izotropik olmayabilir.

Ayrıca yalıtkanın konumunda sabit ve rijit olduğu kabul edilmiştir. Başka bir deyişle yalıtkan elektriksel kuvvetlerin etkisinden etkilenmez.

7.4.1 ρ_f VE V TARİMLERİ

CİNSİNDEN POTANSİYEL ENERJİ

Bölüm 6.5' de olduğu gibi herhangi bir noktada

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_f + \rho_b}{r} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{A}} \frac{\sigma_f + \sigma_b}{r} d\mathcal{A}, \quad (10-17)$$

'dır. Alan içindeki bütün yalıtkanlar lineer olduğu için hipotez gereği ρ_b ρ_f ile σ_b σ_f ile orantılıdır. İlk önce sıfır yük yoğunluğundan başlayalım ve yükleri yavaş yavaş sonsuzdan çekelim. Bir süre için yüzeysel yükleri ihmal edelim. Diyelim ki son potansiyel V ve son yük yoğunluğunda ρ_f olsun. Verilen bir anda yacimsel yük yoğunluğu $\alpha\rho_f$ dir. Burada α kademeli olarak sıfırdan bire artar.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}) = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla V) = \rho_f, \quad (10-18)$$

Olduğu için V ρ_f ile orantılıdır. Sonuç olarak yük yoğunluğu $\alpha\rho_f$ olduğu zaman potansiyelde αV olur. α 'nın $\alpha+d\alpha$ 'ya arttığını düşünelim. Sonuç olarak verilen bir noktada

$$d\rho_f = \rho_f d\alpha, \quad dV = V d\alpha. \quad (10-19)$$

Extra yükü alana çekmek için gerekli olan enerji

$$d\mathcal{E} = \int_v (\rho_f d\alpha) V \left(\alpha + \frac{d\alpha}{2} \right) dv, \quad (10-20)$$

Burada v bütün yükleri içine alır ve bu işlem sırasındaki ortalama potansiyel $V(\alpha + d\alpha/2)$ dir. $(d\alpha/2)^2$ terimini ihmal edersek

$$d\mathcal{E} = \int_v (\rho_f V dv) \alpha d\alpha, \quad (10-21)$$

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \alpha d\alpha \int_v \rho_f V dv = \frac{1}{2} \int_v \rho_f V dv. \quad (10-22)$$

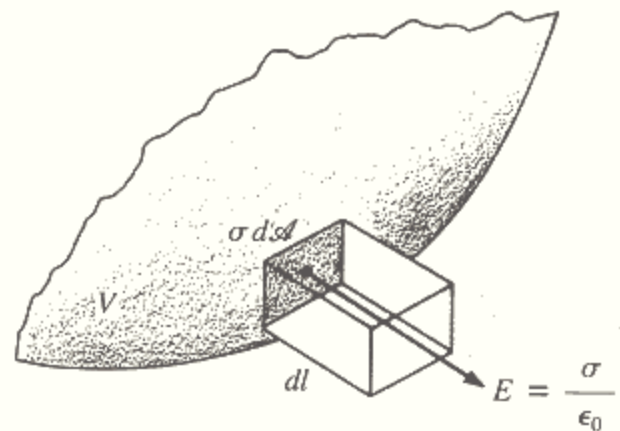
Alanda depolanan enerji bölüm 5.2.2 bölümümde olduğu gibi $\rho_f V$ integralinin yarısına eşittir. Bununla birlikte V alanda konum konumlanan yalıtkanın doğasına, şekline, boyutuna ve pozisyonuna bağlıdır.

7.4.2 E VE D TARİMLERİ

CİNSİNDEN POTANSİYEL ENERJİ

Diyelimki $V_{min} \leq 0$ olan potansiyelin minimum olduğu tek bir nokta bulunsun. Benzer şekilde $V=V_{max} \geq 0$ olan sadece bir nokta bulunsun. Yalıtkanda lineer olsun.

$V=V_{min}$ eşpotansiyeli boyunca uzanan ve yüzey alanı $\mathcal{A}$ olan bir iletken hayal edelim. İletken yavaşça bir eşpotansiyelden diğerine yalıtkanı süpürerek ve önündeki serbest yükleri toplayarak genişler. İletken σ serbest yüzeysel yükleri taşır. Şekilde de görüldüğü gibi $\mathbf{E}$ yüzeye diktir ve genişliği σ/ϵ_0 dır. Eğer medya izotropik değilse $\mathbf{D}$ $\mathbf{E}$ 'ye paralel değildir. Bununla birlikte Gauss yasası gereği



$$\sigma d\mathcal{A} = \mathbf{D} \cdot d\mathcal{A}, \quad (10-24)$$

'dır ve iletkenin içinde $\mathbf{D}$ sıfırdır. Şekilde görüldüğü gibi $d\mathcal{A}$ elementi $d/$ kadar hareket etsin. dL yüzeye diktir. Alan tarafından $\sigma d\mathcal{A}$ yükü üzerinde yapılan iş

$$d\mathcal{E} = (\sigma d\mathcal{A}) \left(\frac{E}{2} \right) dl, \quad (10-25)$$

σdA üzerine etkiyen alan Bölüm 5.6'dan $E/2$ 'dir. Sonuçta

$$d\mathcal{E} = \mathbf{D} \cdot d\mathcal{A} \frac{E}{2} dl = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} d\mathcal{A} dl = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dv. \quad (10-26)$$

İletken yüzey $V=V_{max}$ geriliminli eşpotansiyel yüzeyine ulaşınca kadar genişler. Sonuçta iletken bütün yüzeyleri süpürmüş olur ve bütün serbest yükler ya sonsuza götürülmüş yada zıf işaretli yüklerle nötürleştirilmiş olur ve $\mathbf{E}$ de her herde sıfır olur. Sonuç olarak alan tarafından yapılan toplam iş

$$\mathcal{E} = \int_v \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv, \quad (10-27)$$

Ve enerji yoğunluğu

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (10-28)$$

Olur. Eğer yalıtkan lineer ve izotropik ise $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ olduğundan

$$\mathcal{E} = \int_v \frac{\epsilon_r \epsilon_0 E^2}{2} dv. \quad (10-29)$$

Sonuçta enerji yoğunluğu $\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$. Bu integral alan tarafından işgal edilen bütün yüzeyleri kapsar.

7.4.3 POLARİZASYONLA İLGİLİ ENERJİ YOĞUNLUĞU

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}, \quad (10-30)$$

Olduğu için sadece polarizasyonla alakalı enerji yoğunluğu $\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} / 2$ olur. İzotropik yalıtkanda

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} (1 + \chi_e) \epsilon_0 E^2. \quad (10-31)$$

Birçok yalıtkanda χ_e 1 ile 4 arasındadır ve enerjinin çoğunluğu polarizasyon enerjisidir.

7.5 YALITKANIN VARLIĞINDA ELEKTRİKSEL KUVVETLER

Yalıtkanın varlığında iletkenler arası kuvvet çoğunlukla Bölüm 5.7' de anlatılan **Görsel Çalışma Metodu** ile hesaplanır.

İletken yalıtkan içine konulursa eğer yükler aynı ise kuvvetler boşluğa göre ϵ_r katsayısı kadar küçüktür. Eğer elektrik alan ve dolayısı ile gerilim aynı ise kuvvetler ϵ_r faktörü kadar büyüktür.